МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

«ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ»

МАТЕМАТИКА

(углубленный уровень)

Реализация требований ФГОС основного общего образования

Методическое пособие для учителя

Москва

2022

УДК 373.167.1:51

Рецензенты:

Осмоловская И. М., доктор педагогических наук, зав. лабораторией теоретической педагогики и философии образования ФГБНУ «Институт стратегии развития образования РАО»

Рыдзе О. А., кандидат педагогических наук, старший научный сотрудник лаборатории начального общего образования ФГБНУ «Институт стратегии развития образования РАО»

Рослова Л. О., Алексеева Е. Е., Буцко Е. В., Карамова И. И. Математика (углубленный уровень). Реализация требований ФГОС основного общего образования: методическое пособие для учителя / под ред. Л. О. Рословой. – М.: ФГБНУ «Институт стратегии развития образования РАО», 2022. – с. 135: ил.

В методическом пособии отражены основные нововведения, связанные с принятием обновленных ФГОС в части изучения математики на углубленном уровне.

Методические материалы включают характеристику основных изменений ФГОС ООО и особенностей Примерной рабочей программы по математике углубленного уровня, рекомендации по организации преподавания в 7–9-х классах на углубленном уровне основных содержательных линий курса с учетом нововведений. По каждому курсу учебного предмета «Математика» предложены варианты контрольных работ, предназначенных для проведения внутришкольного мониторинга итоговых достижений учащихся, соответствующих планируемым результатам обучения, представленным в примерной рабочей программе.

Методические рекомендации разработаны в рамках государственного задания ФГБНУ «Институт стратегии развития образования Российской академии образования» на 2022 год «Обновление содержания общего образования» по теме «Подготовка методических рекомендаций для учителей по реализации ФГОС начального общего и основного общего образования, в том числе внеурочной деятельности».

Материалы представляют интерес для широкого круга специалистов в области математического образования: учителей, преподавателей педагогических вузов, методистов системы повышения квалификации учителей, разработчиков материалов для оценки качества образования.

СОДЕРЖАНИЕ

I. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ В 7-9-Х КЛАССАХ НА УГЛУБЛЕННОМ УРОВНЕ

1.1. Ключевые изменения во ФГОС ООО в части обучения математике

1.1.1. Нормативная и методическая базы обучения математике в основной школе

В связи с принятием в мае 2021 года обновленного федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования (далее – ФГОС ООО, Стандарт), в содержании математического образования в 5–9 классах произошли изменения, направленные на реализацию Концепции развития математического образования в Российской Федерации (утверждена в 2013 г.), и выполнение поручения Президента РФ «обеспечить совершенствование преподавания учебных предметов «математика» и «информатика» в общеобразовательных организациях, установив их приоритет в учебном плане и скорректировав содержание примерных основных образовательных программ общего образования» (декабрь 2020 г.).

Во-первых, в новой редакции Стандарта были конкретизированы и структурированы личностные, метапредметные и предметные результаты обучения. Это общее изменение, касающееся всех учебных предметов, в том числе, и математики, важно с той точки зрения, что концептуальные основания стандарта остались прежними, и он продолжает свое развитие в той же парадигме, при этом с учетом изменений, происходящих в науке, обществе и государстве.

Во-вторых, впервые во ФГОС основного общего образования зафиксированы требования не только на базовом, но и углубленном уровне, причем, математика здесь оказалась не единственным предметом (такой прецедент уже имел место): углубленный уровень освоения предмета предусмотрен обновленным Стандартом также и для предметов математического и естественнонаучного направлений – информатики, физики, химии и биологии. Данное нововведение подхватывает и развивает традиции российского математического образования, позволяет углубленному курсу обучения существовать в том же правовом поле, формироваться в той же логике и структуре, что и базовый курс, а также поддерживаться другими предметами. В этом направлении появилась перспектива взаимодействия и интеграции как в рамках предметной области «Математика и информатика», так и предметной области «Естественнонаучные предметы».

Третий важный момент: в обновленном Стандарте было реализовано новое понимание базового и углубленного уровней изучения математики, дано соответствующее этому распределение между ними требований к математической подготовке выпускника основной школы. Прежде всего, определяется ориентация базового курса на интересы и потребности тех учащихся, кому математика будет нужна только «для жизни», но не в профессии, а углубленного курса – на потребности и возможности всех тех учащихся, кто будет математиком или будет использовать математику в профессии (инженеры, программисты, технологи и пр.). До этого традиционная программа углубленного изучения математики была ориентирована на тех обучающихся, кто планирует связать свою будущую профессиональную деятельность с математикой.

В-четвертых, предметные результаты описаны с использованием единой терминологии «оперировать понятием/ свободно оперировать понятием», что позволяет соблюдать преемственность в развитии программ базового и углубленного уровней, математических курсов, математического развития обучающихся.

Пятым важным моментом является новое представление структуры учебного предмета «Математика» для учащихся 7–9 классов, которую образовали три изучаемых параллельно учебных курса: Алгебра, Геометрия, Вероятность и статистика. Основное содержание учебного курса «Вероятность и статистика» ранее было представлено в курсе алгебры. Основными линиями содержания этого курса стали вероятность, статистика, комбинаторика, графы, логика, множества. Данный курс сразу получил прикладной и практический характер, включающий практические работы и эксперименты.

Раскрытие идей Стандарта осуществляется в таких методических документах как Федеральная основная общеобразовательная программа основного общего образования (далее – ФООП) и Примерная рабочая программа по учебному предмету «Математика» (далее – ПРП, Примерная рабочая программа), одобренных ФУМО по общему образованию. В ФООП зафиксирован учебный план, согласно которому на изучение математики в 7–9 классах на углубленном уровне отводится 8 ч в неделю в течение каждого года обучения, в частности, на курс «Алгебры» – 4 ч, курс «Геометрии» – 3 ч, курс «Вероятности и статистики» – 1 ч.

Примерная рабочая программа содержит результаты обучения, содержание обучения и тематическое планирование, распределенные по годам обучения. В тематическом планировании дано примерное распределение учебного времени и описаны основные виды деятельности обучающихся, обеспечивающие достижение планируемых результатов обучения.

1.1.2. Отличия новой программы углубленного изучения математики от традиционной программы

Углубленное изучение математики зародилось в 1960-х годах и имело целью обеспечить на фоне перехода к всеобучу для учащихся, проявляющих способности и интерес к математике, более высокий уровень математического образования, соответствующий их повышенным возможностям. По сути, это было воспитание будущей элиты математической науки. Поэтому программа была рассчитана на творческий уровень изучения предмета, для начала такого обучения был выбран 8 класс, как возраст, когда учащиеся начинают проявлять осознанный интерес к математике, уже начав изучение систематических курсов алгебры и геометрии. Для программы углубленного изучения были разработаны соответствующие учебники, а также проводился и отдельный экзамен, причем разрабатывались отдельные варианты для математических и для физико-математических классов. Появление физико-математических классов стало отражением потребности в математической подготовке высокого уровня будущих специалистов в области теоретический физики, инженерных дисциплин, а также прикладных математических дисциплин, в частности, программистов.

Согласно новой программе, соответствующей обновленному ФГОС ООО, углубленное изучение математики начинается с 7-го класса. Это важное нововведение, но основное и принципиальное отличие, причина которого обусловлена тем, что современный уровень развития науки и техники требует серьезного уровня математической подготовки для значительно большего числа специалистов, чем ранее, причем, не только в точных отраслях, но и в гуманитарных. Ответом на этот вызов становится «массовая углубленка», рассчитанная на тех, кто будет использовать математику в профессии в качестве инструмента, в профессиях, связанных с использованием прикладной математики, информатики или приложений математики. При этом содержание углубленного курса можно считать параллельным базовому, поскольку он отличается от базового не настолько серьезно, чтобы исключить возможность создания единого учебника, обеспечивающего условия для обучения на базовом и углубленном уровнях в рамках одного класса. Новая программа не потребует разработки нового или отдельного экзамена, действующая модель ОГЭ вполне приемлема для оценки достижения результатов, заявленных в новой программе.

С точки зрения преемственности обучения на углубленному уровне важно сохранить все важнейшие принципы, на которых успешно развивалась данная система на протяжении нескольких десятилетий.

Принципы работы математических классов были сформулированы Н. Н. Константиновым – одним из их создателей. Это:

- Тщательность, который означает, что тема проходится тщательно, законченным по смыслу фрагментом, что не исключает последующего возврата к теме на новом, более высоком, содержательном уровне.

«Ученик, который один раз чего-то недопонял, другой раз чего-то недопонял, засоряет, наконец, свою учебу до того, что ему становится противно в ней жить». Н. Н. Константинов.

- *Неторопливость,* который означает, что на каждую трудность учитель тратит столько времени, сколько нужно.

«Не беда, если пройдено мало. А беда начинается тогда, когда нужно что-то «пройти» к определенному сроку». Н. Н. Константинов.

- *Самостоятельность,* который означает, что значительная часть теоретического материала осваивается учащимися самостоятельно – они сами обосновывают большую часть предлагаемых для изучения фактов и утверждений.

«Прямой рассказ учителя малоэффективен, ... основным способом подсказки учителя становится структурирование материала». Н. Н. Константинов.

Эти принципы также легли в основу концепции разработки ПРП по математике углубленного уровня.

1.2. Особенности Примерной рабочей программы по учебному предмету «Математика» углубленного уровня

Выделим четыре основных момента, связанных с новой программой углубленного уровня.

1. Структура Примерной рабочей программы учебного предмета «Математика» на углубленном уровне отвечает общей структуре рабочих программ и аналогична ПРП по математике базового уровня. В нее входят:

Пояснительная записка, включающая:

- общую характеристику учебного предмета «Математика»;
- цели и особенности изучения учебного предмета «Математика»;
- место учебного предмета «Математика» в учебном плане.

Планируемые результаты освоения учебного предмета «Математика» на углубленном уровне:

- личностные результаты;
- метапредметные результаты.

Программы курсов (3 программы), включающие:

- цели изучения учебного курса;
- место учебного курса в учебном плане;
- предметные результаты освоения Примерной рабочей программы (по годам обучения);
- содержание учебного курса (по годам обучения);
- тематическое планирование учебного курса (по годам обучения).

Как было отмечено выше, личностные и метапредметные результаты освоения учебного предмета «Математика» представлены в ПРП не по отдельным курсам, а по предмету в целом, при этом даны они в соответствии с единой принятой структурой, но конкретизированы именно с учетом специфики математики и ее изучения на углубленном уровне.

2. Отметим изменения в обучении математике на углубленном уровне, которые были реализованы в Примерной рабочей программе.

1) Разгрузка объема изучаемого материала за счет отказа от части содержания, снижения требований к освоению формальных элементов содержания и сложных понятий. Прежде всего, это связано с новым вектором в распределении акцентов углубленного курса.

2) Более распределенное во времени и по классам изучение фундаментальных и сложных понятий, важных практико-ориентированных тем, что позволит ученику возвращаться к ключевым понятиям и элементам содержания на более высоком уровне развития его математических знаний,

с новыми связями между понятиями, способами действий, с учетом его взросления.

3) «Ножницы» между распределенными по годам обучения содержанием и требованиями к овладению этим содержанием.

Проиллюстрируем данные тезисы на примере темы «Делимость».

В содержании курса алгебры 7 класса эта тема представлена следующим образом:

Делимость целых чисел. Свойства делимости.

Простые и составные числа. Чётные и нечётные числа. Признаки делимости на 2, 4, 8, 5, 3, 6, 9, 10, 11. Признаки делимости суммы и произведения целых чисел при решении задач с практическим содержанием.

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух чисел. Взаимно простые числа. Алгоритм Евклида.

Деление с остатком. Арифметические операции над остатками.

В 8 классе изучение темы продолжится со следующим содержанием:

Действия с остатками. Остатки степеней. Применение остатков к решению уравнений в целых числах и текстовых задач.

При этом требования к освоению данного содержания по классам имеют следующий вид:

7 класс (Отметим, что требования по теме «Делимость» не представлены в 5–6 классах и появляются впервые только в 7 классе):

– Доказывать и применять при решении задач признаки делимости на 2, 4, 8, 5, 3, 6, 9, 10, 11, признаки делимости суммы и произведения целых чисел.

– Раскладывать на множители натуральные числа.

– Свободно оперировать понятиями: чётное число, нечётное число, взаимно простые числа.

– Находить наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел и использовать их при решении задач, применять алгоритм Евклида.

– Оперировать понятием остатка по модулю, применять свойства сравнений по модулю.

8 класс:

– Свободно оперировать понятием остатка по модулю; применять свойства сравнений по модулю; находить остатки суммы и произведения по данному модулю.

На этом примере мы можем видеть следующее:

на углубленном уровне от обучающегося требуется не только «оперировать понятием», но «свободно оперировать понятием» (например, понятием четного числа), а это более высокий, теоретический уровень овладения понятием;

формирование понятия осуществляется последовательно, от «оперировать понятием» к «свободно оперировать понятием», например, от «оперировать понятием остатка по модулю» в 7 классе, к «свободно оперировать понятием остатка по модулю» в 8 классе.

3. Изучение курса «Вероятность и статистика» на углубленном уровне осуществляется в рамках входящих в него следующих содержательных линий:

- Представление данных и описательная статистика;
- Вероятность;
- Элементы комбинаторики;
- Введение в теорию графов;
- Логика.

Что касается принципов изучения данного содержания, то они в связи с новой структурой и выделением нового курса не изменились. Во-первых, основой его изучения остается первичность статистики: истоки содержания – это наблюдения над случайной изменчивостью и закономерностями в случайном. Во-вторых, обучение строится на некомбинаторном подходе: теория вероятностей выступает как математическое описание случайности, а сама вероятность – как мера правдоподобия событий. В-третьих, курс имеет ярко выраженную практическую направленность; по итогу освоения курса у обучающихся должны сформироваться:

- умение представлять, описывать и использовать данные;
- представление о роли маловероятных событий в природе и обществе;
- понимание закона больших чисел как фундаментального закона природы, имеющего математическое выражение;
- функциональная грамотность.

4. В тематическом планировании, как и принято, дается распределение содержания по темам с указанием рекомендуемых часов на их изучение. Содержание представлено крупными тематическими блоками, чтобы авторы программ и учебников, учителя, составляющие свои авторские программы, могли вписаться в эти рамки и найти структурирование, адекватное отработанным и зарекомендовавшим себя в практике обучения методическим подходам и принципам. В программе отмечено: «Автор рабочей программы вправе увеличить или уменьшить предложенное число учебных часов на тему, чтобы углубиться в тематику, более заинтересовавшую учеников, или направить усилия на преодоление затруднений. Допустимо также локальное перераспределение и перестановка элементов содержания внутри данного класса».

Принципиальная позиция разработчиков программы заключается в том, что контроль не фиксируется в программе, количество проверочных работ (тематический и итоговый контроль качества усвоения учебного материала) и их тип (самостоятельные и контрольные работы, тесты) остаются на усмотрение учителя. Также учитель вправе увеличить или уменьшить число учебных часов, отведённых на обобщение, повторение, систематизацию знаний обучающихся.

Подчеркнуто, что «единственной целью и критерием является достижение планируемых результатов обучения, указанных в программе».

Для обеспечения процесса формирования предметных и метапредметных результатов обучения в тематическом планировании представлены соответствующие виды деятельности, направленные на формирование прочных предметных навыков: выполнять преобразования алгебраических выражений, геометрические построения, проводить статистический эксперимент, работать с формулами, решать уравнения и задачи и т.п., и метапредметных навыков: строить цепочки логических утверждений, рассуждать, находить закономерности, работать с информацией, проводить эксперименты, практические работы и исследования, в том числе с использованием цифровых ресурсов. Специфика углубленного курса проявляется в интеллектуализации видов деятельности (выбирать, предлагать и обсуждать алгоритмы, способы решения задачи), в увеличении доли заданий исследовательского характера, в усилении теоретической составляющей (работа с теорией), логической компоненты (приводить примеры и контрпримеры, решать задачи на доказательство).

В целях усиления практико-ориентированной направленности обучения практические работы в курсе вероятности и статистики вставлены в планировании как элемент содержания.

Необходимость использования цифровых ресурсов также отражена в видах деятельности в тех темах, где это целесообразно, подчеркивается потенциал цифровых ресурсов, прежде всего, для развития исследовательских умений обучающихся, осваивающих программу углубленного уровня.

В видах деятельности уделено внимание формированию функциональной математической грамотности, во многих темах всех курсов предлагается «решать задачи из реальной жизни», «применять математические знания для решения задач из других предметов». Для учащихся, осваивающих математику на углубленном уровне, актуально достижение высоких уровней математической грамотности, что соответствует уровням 5 и 6, выделенных в международном исследовании PISA. Для обучающихся, достигших этих уровней, характерно умение исследовать и моделировать сложные проблемы, разбираться с нетипичными контекстами, работать с разными источниками и информацией, представленной в различных формах, создавать новые стратегии, проявлять интуицию, рассуждать, делать выводы и предъявлять аргументацию в письменной форме, использовать формальный язык математики.

Акцентированное формирование функциональной математической грамотности, феномен которой изучается как в ходе международных исследований, так и российских, поможет учителю сделать изучение математики на углубленном уровне более прикладным и мотивированным.

В заключение отметим, что реализация в образовательной практике обновленного нормативно-методического программного комплекса, который с одной стороны, базируется на традициях и достижениях математического образования, а с другой стороны, открывает новые возможности и ресурсы, позволит сделать углубленное обучение математике более результативным, а процесс овладения математическими знаниями – более творческим.

1.3. Особенности планируемых результатов обучения математике в 7–9 классах на углублённом уровне

Федеральные государственные образовательные стандарты основного общего образования (с изменениями 2021 года), сохраняя преемственность в требованиях к результатам обучения математике, имеют ряд особенностей в направлении личностного развития учащихся, достижения метапредметных и предметных результатов обучения. Эти особенности Стандартов учтены в примерных рабочих программах основного и среднего общего образования по математике углублённого уровня изучения предмета в 7–9 классах.

Особенностью требований Стандартов к результатам в направлении **личностного развития учащихся** является акцент на формировании у обучающихся гражданско-патриотических ценностей и их духовно-нравственном воспитании при изучении всех учебных курсов математики. В Примерной рабочей программе углублённого уровня результаты обучения в этом направлении конкретизированы с учётом учебного предмета «Математика». Охарактеризуем и обобщим планируемые личностные результаты освоения предметом в 7–9 классах, по акцентируемым и некоторым другим направлениям (табл. 1).

Таблица 1

Личностные результаты

освоения программы учебного предмета «Математика»

Направление	*Характеристика*
Гражданское воспитание	Готовность к выполнению обязанностей гражданина и реализации его прав; сформированность активной гражданской позиции; представление о математических основах функционирования различных структур и процедур общества (выборы, опросы и пр.).
Патриотическое воспитание	Осознание российской гражданской идентичности; сформированность уважения к прошлому и настоящему российской математики, ценностного отношения к достижениям российских математиков и российской математической школы; готовность к использованию достижений в других областях науки и сферах жизни.
Духовно-нравственное воспитание	Осознание духовных ценностей российского народа; готовность к оцениванию своего нравственного и этического поведения, связанного с практическим применением достижений науки и учёного; осознание личного вклада в построение устойчивого будущего.
Эстетическое воспитание	Осознание эстетики математических закономерностей, объектов, задач и их решений; восприимчивость математических аспектов различных видов искусства.
Экологическое воспитание	Сформированность экологической культуры, понимание влияния социально-экономических процессов на состояние природной и социальной среды, осознание глобального характера экологических

	проблем; ориентация на применение математических знаний для решения задач в области окружающей среды; готовность к планированию действий и оценке их возможных последствий для окружающей среды.
Ценности научного познания	Понимание математической науки как сферы человеческой деятельности; осознание значимости математики для развития цивилизации; овладение языком математики и математической культурой как средством познания мира; готовность осуществлять проектную и исследовательскую деятельность.

Достижение учащимися планируемых **метапредметных результатов**, включающих познавательные, регулятивные и коммуникативные универсальные учебные действия (УУД), при изучении всех математических курсов отражают способность и готовность обучающихся использовать УУД для ориентации в реальных жизненных ситуациях, для решения повседневных и нетиповых задач в собственной деятельности или в сотрудничестве. Отметим, что в первую очередь необходимо организовывать деятельность учащихся в направлении формирования познавательных УУД, которые представлены базовыми логическими и исследовательскими действиями и действиями при работе с информацией (табл. 2).

Таблица 2

Универсальные познавательные действия освоения программы учебного предмета «Математика»

Базовые логические действия
• выявлять и характеризовать существенные признаки математических объектов, понятий, отношений между ними; формулировать определения понятий; устанавливать существенный признак для классификации, основания для обобщения и сравнения, критерии проводимого анализа; • воспринимать, формулировать и преобразовывать суждения: утвердительные и отрицательные, единичные, частные и общие; условные; • выявлять математические закономерности, взаимосвязи и противоречия в фактах, данных, наблюдениях и утверждениях; предлагать критерии для выявления закономерностей и противоречий;

• делать выводы с использованием законов логики, дедуктивных и индуктивных умозаключений, умозаключений по аналогии; • разбирать доказательства математических утверждений (прямые и от противного), проводить самостоятельно доказательства математических фактов, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры, применять метод математической индукции; обосновывать собственные рассуждения; • выбирать способ решения учебной задачи (сравнивать несколько вариантов решения, выбирать наиболее подходящий с учётом самостоятельно выделенных критериев).
Базовые исследовательские действия
• использовать вопросы как исследовательский инструмент познания; формулировать вопросы, фиксирующие противоречие, проблему, самостоятельно устанавливать искомое и данное, формировать гипотезу, аргументировать свою позицию, мнение; • проводить по самостоятельно составленному плану эксперимент, исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой; • самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого наблюдения, исследования, эксперимента, оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений; • прогнозировать возможное развитие процесса, а также выдвигать предположения о его развитии в новых условиях.
Действия при работе с информацией
• выявлять недостаточность и избыточность информации, данных, необходимых для решения задачи; • выбирать, анализировать, систематизировать и интерпретировать информацию различных видов и форм представления; • выбирать форму представления информации и иллюстрировать решаемые задачи схемами, диаграммами, иной графикой и их комбинациями; • оценивать надёжность информации по критериям, предложенным или сформулированным самостоятельно.

Одной из особенностей **предметных результатов** изучения математики, является их ориентация на применение знаний, умений и навыков обучающимися, не только в учебных ситуациях, но и в реальных жизненных условиях. Кроме этого, предметные результаты изучения математики на углублённом уровне сконцентрированы на свободном оперировании математическими понятиями. Это означает, что у учащихся не только сформированы знания определения понятия и его свойств, умения доказывать изучаемые свойства и признаки понятия, но и умения выявлять и характеризовать связи с другими понятиями, использовать понятие и его свойства при проведении доказательства какого-либо факта или математического отношения, решении задач более высокого уровня сложности.

Отметим, что планируемые результаты обучения математике, соответствующие Стандартам и Примерным рабочим программам ООО на обоих уровнях, ориентированы на формирование готовности применения результатов обучения учебному предмету «Математика» как при решении повседневных привычных или знакомых задач, так и незнакомых, нестандартных задач реальной жизни, т. е. функциональной математической грамотности.

Достижение планируемых результатов обучения всех математических учебных курсов в направлении личностного развития учащихся, метапредметных и предметных результатов обучения требует использования новых подходов в организации образовательного процесса, интеграции формирования функциональной математической грамотности и обновления содержания школьного курса математики. Отметим, что формирование планируемых результатов должно осуществляться в интеграции урочной и внеурочной деятельности по всем учебным курсам. При этом внеурочная деятельность включает не только различные предметные мероприятия, но и учебные модули, сконструированные для расширения и углубления содержания учебных курсов. Обучение всем учебным курсам предмета «Математика» базируется на системно-деятельностном подходе, как методологической основы Стандартов и Рабочих программ, личностно-ориентированном и дифференцированном подходах. Большое значение в достижении планируемых результатов обучения математике имеет практическая деятельность учащихся.

Таким образом, изучение учебного предмета «Математика» на углублённом уровне направлено на предоставление возможности каждому обучающемуся проявить свои интеллектуальные и творческие способности, приобретения знаний, умений и навыков, необходимых для продолжения получения образования и дальнейшей трудовой деятельности в областях, определённых Стратегией научно-технологического развития.

1.4. Контроль достижения планируемых результатов обучения в 7 классе

1.4.1. Предметные результаты освоения программы учебного предмета «Математика», 7 класс

Предметные результаты освоения программы учебного предмета «Математика» за 7 класс по отдельным курсам представлены в таблице 3.

Таблица 3

Учебный курс «Алгебра»
Числа **Рациональные числа** • Переходить от одной формы записи чисел к другой (преобразовывать десятичную дробь в обыкновенную, обыкновенную в десятичную, в частности в бесконечную десятичную дробь). • Использовать понятия: множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел, при решении задач, проведении рассуждений и доказательств. • Понимать и объяснять смысл позиционной записи натурального числа; • Сравнивать и упорядочивать рациональные числа. • Выполнять, сочетая устные и письменные приёмы, арифметические действия с рациональными числами, использовать свойства чисел и правила действий, приемы рациональных вычислений. • Выполнять действия со степенями с натуральными показателями. • Находить значения числовых выражений, содержащих рациональные числа и степени с натуральным показателем; применять разнообразные способы и приёмы вычисления; составлять и оценивать числовые

выражения при решении практических задач и задач из других учебных предметов.

- Округлять числа с заданной точностью, а также по смыслу практической ситуации; выполнять прикидку и оценку результата вычислений, оценку значений числовых выражений, в том числе, при решении практических задач.
- Решать текстовые задачи арифметическим способом; использовать таблицы, схемы, чертежи, другие средства представления данных при решении задачи.
- Решать практико-ориентированные задачи, связанные с отношением величин, пропорциональностью величин, процентами; интерпретировать результаты решения задач с учётом ограничений, связанных со свойствами рассматриваемых объектов.

Делимость

- Доказывать и применять при решении задач признаки делимости на 2, 4, 8, 5, 3, 6, 9, 10, 11, признаки делимости суммы и произведения целых чисел.
- Раскладывать на множители натуральные числа.
- Свободно оперировать понятиями: четное число, нечетное число, взаимно простые числа.
- Находить наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел и использовать их при решении задач, применять алгоритм Евклида.
- Оперировать понятием остатка по модулю, применять свойства сравнений по модулю.

Алгебраические выражения

Выражения с переменными

- Использовать алгебраическую терминологию и символику, применять её в процессе освоения учебного материала.
- Находить значения алгебраических выражений при заданных значениях переменных.
- Использовать понятие тождества, выполнять тождественнее преобразования выражений, доказывать тождества.

Многочлены

- Выполнять преобразования целого выражения в многочлен приведением подобных слагаемых, раскрытием скобок.

- Выполнять действия (сложение, вычитание, умножение) с одночленами и с многочленами, выполнять умножение одночлена на многочлен, применять формулы сокращённого умножения (квадрат и куб суммы, квадрат и куб разности, разность квадратов, сумма и разность кубов), в том числе для упрощения вычислений.
- Осуществлять разложение многочленов на множители с помощью вынесения за скобки общего множителя, группировки слагаемых, применяя формулы сокращённого умножения.
- Применять преобразования многочленов для решения различных задач из математики, смежных предметов, из реальной практики.
- Использовать свойства степеней с натуральными показателями для преобразования выражений.

Уравнения и системы уравнений

- Решать линейные уравнения с одной переменной, применяя правила перехода от исходного уравнения к равносильному ему. Проверять, является ли число корнем уравнения.
- Применять графические методы при решении линейных уравнений и их систем.
- Подбирать примеры пар чисел, являющихся решением линейного уравнения с двумя переменными.
- Строить в координатной плоскости график линейного уравнения с двумя переменными; пользуясь графиком, приводить примеры решения уравнения.
- Решать системы двух линейных уравнений с двумя переменными, в том числе графически.
- Составлять и решать линейное уравнение или систему линейных уравнений по условию задачи, интерпретировать в соответствии с контекстом задачи полученный результат.

Функции

Координаты и графики

- Изображать на координатной прямой точки, соответствующие заданным координатам, лучи, отрезки, интервалы; записывать числовые промежутки на алгебраическом языке.
- Отмечать в координатной плоскости точки по заданным координатам.

Функции

- Строить график линейной функции.

• Описывать с помощью функций известные зависимости между величинами: скорость, время, расстояние; цена, количество, стоимость; производительность, время, объём работы. • Находить значение функции по значению её аргумента. • Понимать графический способ представления и анализа информации; извлекать и интерпретировать информацию из графиков реальных процессов и зависимостей. • Использовать свойства функций для анализа графиков реальных зависимостей (нули функции, промежутки знакопостоянства функции, промежутки возрастания и убывания функции, наибольшее и наименьшее значения функции). • Использовать графики для исследования процессов и зависимостей; при решении задач из других учебных предметов и реальной жизни.
Учебный курс «Геометрия»
• Распознавать изученные геометрические фигуры, определять их взаимное расположение, изображать геометрические фигуры; выполнять чертежи по условию задачи. Измерять линейные и угловые величины. Решать задачи на вычисление длин отрезков и величин углов. • Делать прикидку и оценку линейных и угловых величин предметов в реальной жизни, размеров природных объектов. Различать размеры этих объектов по порядку величины. • Строить чертежи к геометрическим задачам. • Пользоваться признаками равенства треугольников, использовать признаки и свойства равнобедренных треугольников при решении задач. • Проводить логические рассуждения с использованием геометрических теорем. • Пользоваться признаками равенства прямоугольных треугольников, свойством медианы, проведённой к гипотенузе прямоугольного треугольника, в решении геометрических задач. • Определять параллельность прямых с помощью углов, которые образует с ними секущая. Определять параллельность прямых с помощью равенства расстояний от точек одной прямой до точек другой прямой. • Решать задачи на клетчатой бумаге. • Проводить вычисления и находить числовые и буквенные значения углов в геометрических задачах с использованием суммы углов треугольников и многоугольников, свойств углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей. Решать практические задачи на нахождение углов.

• Уверенно владеть понятием геометрического места точек (ГМТ). Уметь определять биссектрису угла и серединный перпендикуляр к отрезку как геометрические места точек. Уметь пользоваться понятием ГМТ при доказательстве геометрических утверждений и при решении задач. • Формулировать определения окружности и круга, хорды и диаметра окружности, уверенно владеть их свойствами. Уметь доказывать и применять эти свойства при решении задач. • Уверенно владеть понятием описанной около треугольника окружности, уметь находить её центр. Уметь доказывать и использовать факты о том, что биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке, и о том, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. • Уверено владеть понятием касательной к окружности, пользоваться теоремой о перпендикулярности касательной и радиуса, проведённого к точке касания. Уметь доказывать равенство отрезков касательных к окружности, проведенных из одной точки, и применять это в решении геометрических задач. • Уметь доказывать и применять простейшие геометрические неравенствами, понимать их практический смысл. • Проводить основные геометрические построения с помощью циркуля и линейки.
Учебный курс «Вероятность и статистика»
• Читать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах; представлять данные в виде таблиц, строить столбиковые (столбчатые) и круговые диаграммы по массивам значений. • Описывать и интерпретировать реальные числовые данные, представленные в таблицах, на диаграммах, графиках. • Использовать для описания данных статистические характеристики: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, квартили. • Иметь представление о логических утверждениях и высказываниях, уметь строить отрицания, формулировать условные утверждения при решении задач, в том числе из других учебных курсов, иметь представление о теоремах-свойствах и теоремах-признаках, о необходимых и достаточных условиях, о методе доказательства от противного. • Иметь представление о случайной изменчивости на примерах результатов измерений, цен, физических величин, антропометрических данных; иметь представление о статистической устойчивости.

- Использовать для описания данных частоты значений, группировать данные, строить гистограммы группированных данных.
- Использовать графы для решения задач, иметь представление о терминах теории графов: вершина, ребро, цепь, цикл, путь в графе, иметь представление об обходе графа и об ориентированных графах.

1.4.2. Пример итоговой контрольной работы по курсу алгебры

1.4.2.1. Спецификация контрольно-измерительных материалов для оценки достижения планируемых результатов обучения по алгебре в 7 классе на углубленном уровне

Назначение работы: определение соответствия образовательных результатов освоения учащимися учебного курса «Алгебра» 7 класса на углубленном уровне.

Документы, определяющие нормативно-методическую базу контрольной работы:

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 года № 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования»);
2. Примерная рабочая программа основного общего образования. Математика. Углублённый уровень (одобрена ФУМО 29.04.2022 года, протокол №2/22).

Структура работы

Всего в работе 10 заданий, среди них 7 заданий обязательного уровня и 3 задания повышенного уровня освоения курса.

Задания обозначены в работе специальными значками:

○ – задание обязательного уровня;

● – задание повышенного уровня.

Распределение заданий по разделам содержания приведено в таблице 4.

Таблица 4

Распределение заданий по разделам содержания

Название раздела содержания	*Число заданий*
Числа и вычисления	4
Алгебраические выражения	2
Уравнения и неравенства	2
Функции и графики	2

План контрольной работы приведен в таблице 5.

Таблица 5

План варианта работы

Номер задания	*Проверяемые умения*	*Уровень освоения*	*Примерное время выполнения, мин*
1	Использовать свойства степеней с натуральными показателями для преобразования выражений	Обязательный	3
2	Применять при решении задач признаки делимости на 2, 4, 8, 5, 3, 6, 9, 10, 11.	Обязательный	3
3	Решать линейные уравнения с одной переменной, применяя правила перехода от сходного уравнения к равносильному ему	Обязательный	4
4	Осуществлять разложение многочленов на множители с помощью вынесения за скобки общего множителя, группировки слагаемых, применяя формулы сокращённого умножения	Обязательный	3
5	Понимать графический способ представления и анализа информации; извлекать и интерпретировать информацию из	Обязательный	4

	графиков реальных процессов и зависимостей		
6	Решать системы двух линейных уравнений с двумя переменными	Обязательный	5
7	Находить наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел и использовать их при решении задач	Обязательный	4
8	Решать практико-ориентированные задачи, связанные с отношением величин, пропорциональностью величин, процентами; интерпретировать результаты решения задач с учётом ограничений, связанных со свойствами рассматриваемых объектов	Повышенный	4
9	Находить значение функции по значению её аргумента. Использовать свойства функций для анализа графиков. Строить графики линейных функций	Повышенный	5
10	Подбирать примеры пар чисел, являющихся решением линейного уравнения с двумя переменными	Повышенный	5

Время выполнения работы

На выполнение контрольной работы отводится 40 мин.

Оценивание результатов выполнения работы

Критерии оценивания должны быть открыты для учащихся с тем, чтобы они понимали, как и за что выставляется та или иная отметка.

Контрольная работа и, соответственно, критерии оценки составлены таким образом, чтобы у учащихся было «право на ошибку» при выполнении работы как на отметку «3», так и на отметку «5».

Предлагаемые критерии оценивания носят рекомендательный характер, и могут корректироваться учителем в зависимости от особенностей класса.

При этом, однако, целесообразно сохранять два описанных выше требования: надо, чтобы учащимся было объяснено, за что будет выставляться та или иная отметка; надо, чтобы у учащихся сохранялось «право на ошибку».

Задания 1–3 и 6–10 считаются выполненными верно, если ученик дал верный ответ на вопрос задания и привел соответствующее ответу решение.

Задание 4 считается выполненным верно, если ученик выписал номера **всех** верных равенств, в противном случае задание не считается выполненным.

Задание 5 считается выполненным верно, если на **все** вопросы даны верные ответы.

В таблице 6 приводится рекомендуемое наименьшее число заданий, которые необходимо выполнить, чтобы получить отметки «3», «4» и «5».

Таблица 6

Рекомендации по оцениванию выполнения контрольной работы

<table>
<tr><td>Отметка</td><td colspan="2">отметка «3»</td><td colspan="2">отметка «4»</td><td colspan="2">отметка «5»</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Выполнено верно заданий</td><td>○</td><td>●</td><td>○</td><td>●</td><td>○</td><td>●</td></tr>
<tr><td>6</td><td>–</td><td>7
6</td><td>–
1</td><td>7</td><td>2</td></tr>
</table>

В таблице 7 даются ответы к заданиям контрольной работы.

Таблица 7

Ответы к заданиям контрольной работы

Номер задания	*Вариант 1*	*Вариант 2*
1	–224	–195
2	4587	7216
3	5	–5
4	1, 4	1, 3
5	1) 0° С; 3° С; –2° С; 2) в 2 ч; с 23 ч до 24 ч; 3) с 0 ч до 12 ч; 4) с 0 ч до 7 ч; с 18 ч до 24 ч;	1) 0° С; 2,5° С; 2° С; 2) с 2 ч до 4 ч; в 23 ч; 3) с 0 ч до 14 ч; 4) с 0 ч до 8 ч; с 19 ч до 24 ч;

	5) не является.	5) не является.
6	(0, –2)	(0, –4)
7	Приведено доказательство	Приведено доказательство
8	2 %	3 %
9	$y = 3x - 2$	$y = 4x - 5$
10	1) 10 купюр достоинством 2000 р. и 2 купюры достоинством 5000 р.; 2) 5 купюр достоинством 2000 р. и 4 купюры достоинством 5000 р.	1) 15 купюр достоинством 2000 р. и 2 купюры достоинством 5000 р.; 2) 10 купюр достоинством 2000 р. и 4 купюры достоинством 5000 р.; 3) 5 купюр достоинством 2000 р. и 6 купюр достоинством 5000 р.

1.4.2.2. Итоговая контрольная работа по курсу «Алгебра. Углубленный уровень». 7 класс

Вариант 1

○1. Найдите значение выражения $\frac{(-5)^{12}\cdot 27^3}{(-3)^7\cdot 25^5}+(-12,7)^0$.

○ 2. Максим придумал для велосипедного замка код и записал пять чисел:

363, 3645, 4587, 1012, 4443.

Одно из них является кодом для замка. Известно, что это число четырёхзначное, кратно числу 11 и нечётное. Какой код придумал Максим?

○ 3. Решите уравнение: $(7 + x)(x - 7) - x(x - 9,4) = -2$.

○ 4. Запишите номера всех верных равенств.

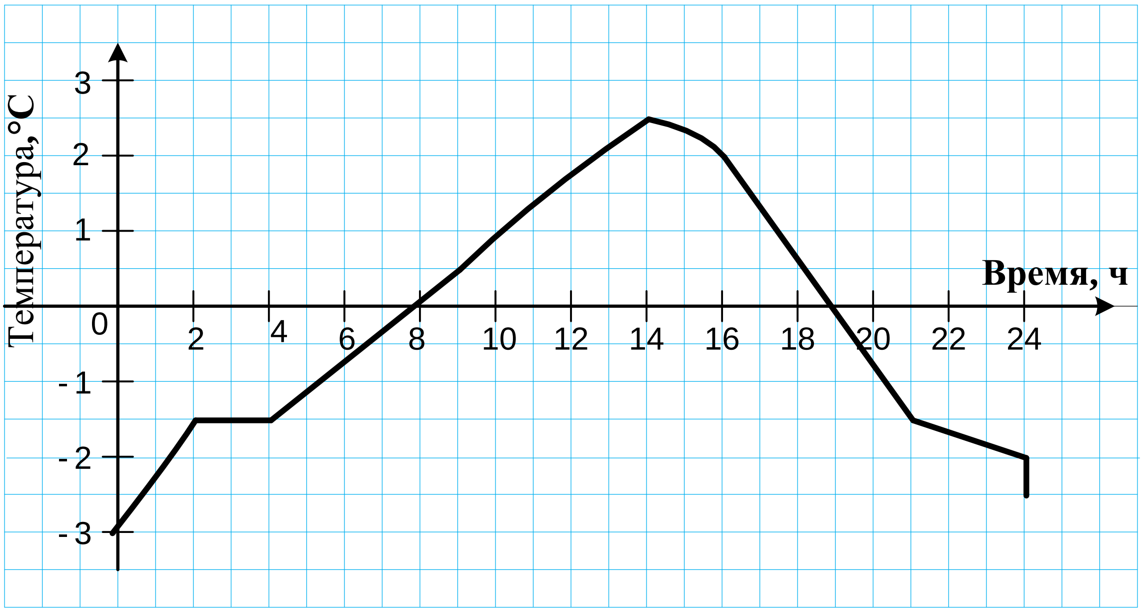
1) $(4 + a)^2 - 9b^2 = (4 + a - 3b)(4 + a + 3b)$

2) $8x^5 - 32x^{13} = 8x^5(1 - 2x^4)^2$

3) $-20y^2 + 20yx^2 - 5x^4 = 5(2y - x^2)^2$

4) $9c^2 + 6c + 1 - d^2 = (3c + 1 - d)(3c - 1 - d)$

○ 5. На рисунке изображён график изменения температуры воздуха на протяжении суток.



Пользуясь графиком, определите:

1) какой была температура воздуха в 16 ч;

2) в какое время температура воздуха составляла –2,5°С;

3) в течение какого промежутка времени температура воздуха повышалась;

4) в течение скольких часов температура воздуха была ниже 0°С.

○ 6. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2{,}3x + 8{,}5y = -17, \\ -4{,}6y - 2{,}3x = 9{,}2. \end{cases}$

○ 7. Докажите, что дробь $\dfrac{2n+3}{4n+7}$ является несократимой.

● 8. В школьной олимпиаде по математике участвовали 40% учащихся седьмых классов, из них 5% учащихся приняли участие в школьной олимпиаде по физике. (В олимпиаде по физике участвовали только участники олимпиады по математике.) Сколько процентов учащихся седьмого класса участвовали в школьных олимпиадах и по математике и по физике?

● 9. График линейной функции пересекает ось ординат в точке A (0; –2) и пересекает график функции $y = 4x - 3$ в точке с равными абсциссой и ординатой. Задайте формулой линейную функцию и постройте её график.

● 10. Ольге Сергеевне нужно оплатить покупку велосипеда стоимостью 30000 р. У нее есть только купюры достоинством 2000 р. и 5000 р. Сколько купюр каждого достоинства нужно для оплаты покупки, используя купюры обоих достоинств, без сдачи? Найди все возможные варианты.

Вариант 2

○1. Найдите значение выражения $\dfrac{(-4)^{13}\cdot 49^4}{(-7)^6\cdot 16^6}+(-15,2)^0$.

○ 2. Татьяна придумала для велосипедного замка код и записала пять чисел: 5644, 2057, 7216, 1634, 22022. Одно из них является кодом для замка. Известно, что это число четырёхзначное, чётное и кратно числу 11. Какой код придумала Татьяна?

○ 3. Решите уравнение $(6 + x)(x - 6) - x(x + 1,2) = -30$.

○ 4. Запишите номера всех верных равенств.

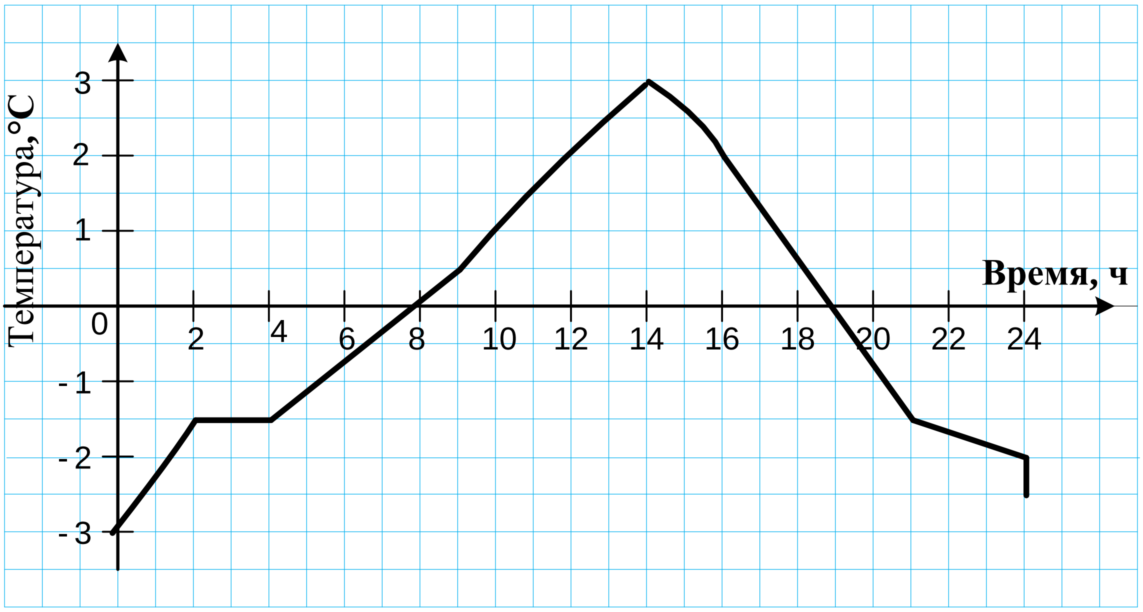
1) $(3 + a)^2 - 16b^2 = (3 + a + 4b)(3 + a - 4b)$

2) $9y^6 - 36y^{14} = 9x^6(1 - 2y^4)^2$

3) $-7x^4 + 42yx^2 - 63y^2 = -7(x^2 - 3y)^2$

4) $4n^2 + 4n + 1 - m^2 = (4n + 1 - m)(4n - 1 - m)$

○ 5. На рисунке изображён график изменения температуры воздуха на протяжении суток.



Пользуясь графиком, определите:

1) какой была температура воздуха 12 ч;

2) в какое время температура воздуха равнялась –1,5° С;

3) промежуток времени, в течение которого температура воздуха повышалась;

4) в течение скольких часов температура воздуха была ниже 0° С.

○ 6. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3,4x+6,4y=-25,6, \\ -2,5y-3,4x=10. \end{cases}$

○7. Докажите, что дробь $\dfrac{3n+4}{6n+9}$ является несократимой.

● 8. В школьной олимпиаде по биологии участвовали 50% учащихся седьмых классов, из них 6% учащихся приняли участие в школьной олимпиаде по литературе. (В олимпиаде по литературе участвовали только участники олимпиады по биологии.) Сколько процентов учащихся седьмого класса участвовали в школьных олимпиадах и по биологии и по литературе?

● 9. График линейной функции пересекает ось ординат в точке A (0; –5) и пересекает график функции $y = 5x - 8$ в точке с равными абсциссой и ординатой. Задайте формулой эту линейную функцию и постройте её график.

● 10. Виктору Михайловичу нужно оплатить покупку электросамоката стоимостью 40000 р. У него есть только купюры достоинством 2000 рублей и 5000 рублей. Сколько купюр каждого достоинства нужно для оплаты покупки, используя купюры обоих достоинств, без сдачи? Найди все возможные варианты.

1.4.3. Пример итоговой контрольной работы по геометрии

1.4.3.1. Спецификация контрольно-измерительных материалов для оценки достижения планируемых результатов обучения по геометрии в 7 классе на углубленном уровне

Назначение работы: определение соответствия образовательных результатов освоения учащимися учебного курса «Геометрия» 7 класса на углубленном уровне.

Документы, определяющие нормативно-методическую базу контрольной работы:

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 года № 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования»);
2. Примерная рабочая программа основного общего образования. Математика. Углублённый уровень (одобрена ФУМО 29.04.2022 года протокол №2/22).

Структура работы

Всего в работе 10 заданий, среди них 7 заданий обязательного уровня и 3 задания повышенного уровня освоения курса.

Задания обозначены в работе специальными значками:

○ – задание обязательного уровня;

● – задание повышенного уровня.

Распределение заданий по разделам содержания приведено в таблице 8.

Таблица 8

Распределение заданий по разделам содержания

Название раздела содержания	*Число заданий*
Начала геометрии	2
Треугольники	2
Параллельные прямые. Сумма углов многоугольника	3
Прямоугольные треугольники	1
Окружность	1
Геометрические места точек	1

План контрольной работы приведен в таблице 9.

Таблица 9

План варианта работы

Номер задания	*Проверяемые умения*	*Уровень освоения*	*Примерное время выполнения, мин*
1	Решать задачи на вычисление длин отрезков	Обязательный	2
2	Решать задачи на вычисление величин углов	Обязательный	3
3	Пользоваться признаками равенства треугольников	Обязательный	3
4	Определять параллельность прямых, используя свойства параллельных и секущей	Обязательный	2

5	Использовать и свойства равнобедренного треугольника при решении задач на клетчатой бумаге	Обязательный	2
6	Пользоваться понятием ГМТ при решении задач	Обязательный	3
7	Использовать понятие вписанной в треугольник окружности	Обязательный	4
8	Использовать теорему о сумме углов треугольника и признаки равнобедренного треугольника	Повышенный	7
9	Использовать признаки параллельности прямых	Повышенный	7
10	Использовать признаки равнобедренного треугольника, находить числовые и буквенные значения углов в геометрических задачах	Повышенный	7

Время выполнения работы

На выполнение контрольной работы отводится 40 мин.

Оценивание результатов выполнения работы

Критерии оценивания должны быть открыты для учащихся с тем, чтобы они понимали, как и за что выставляется та или иная отметка.

Контрольная работа и, соответственно, критерии оценки составлены таким образом, чтобы у учащихся было «право на ошибку» при выполнении работы как на отметку «3», так и на отметку «5».

Предлагаемые критерии оценивания носят рекомендательный характер, и могут корректироваться учителем в зависимости от особенностей класса. При этом, однако, целесообразно сохранять два описанных выше требования: надо, чтобы учащимся было объяснено, за что будет выставляться та или иная отметка; надо, чтобы у учащихся сохранялось «право на ошибку».

При выполнении заданий обязательного уровня полное обоснование решений не требуется. При увеличении времени выполнения работы до 60 мин и более можно включить требование полных обоснований решений.

Задание 4 считается выполненным верно, если ученик выписал номера **всех** верных равенств, в противном случае задание не считается выполненным.

В таблице 10 приводится рекомендуемое наименьшее число заданий, которые необходимо выполнить, чтобы получить отметки «3», «4» и «5».

Таблица 10

Рекомендации по оцениванию выполнения контрольной работы

Отметка	отметка «3»		отметка «4»		отметка «5»	
Выполнено верно заданий	○	●	○	●	○	●
	6	–	7 6	– 1	7	2

В таблице 11 даются ответы к заданиям контрольной работы.

Таблица 11

Ответы к заданиям контрольной работы

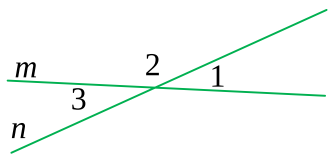
Номер задания	*Вариант 1*	*Вариант 2*
1	2	2
2	151°	96°
3	4,3 см	3,8 см
4	2, 4	1, 4
5	16,5 см	22,5 см
6	2	4
7	48 см	36 см
8	12 см	18 см
9	Приведено доказательство	Приведено доказательство
10	$90° + \alpha$	$90° + 2\alpha$

1.4.3.2. Итоговая контрольная работа по курсу «Геометрия. Углубленный уровень». 7 класс

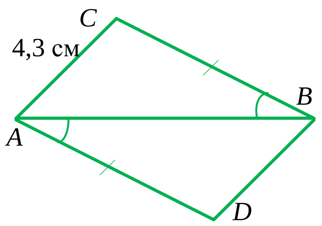
Вариант 1

○ 1. Длина отрезка *AD* равна 46 мм. Сколько существует на прямой *AD* точек, для которых сумма расстояний до концов отрезка *AD* равна 5 см?

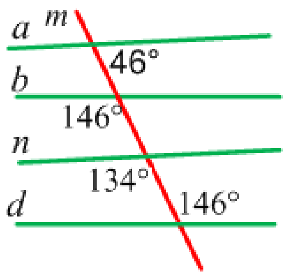
○ 2. Известно, что прямые m и n пересекаются и $\angle 1 + \angle 3 = 58°$. Найдите угол 2.



○ 3. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите сторону *BD*.



○ 4. Используя данные, приведенные на рисунке, определите, верны ли утверждения. Укажите в ответе номера всех верных утверждений.



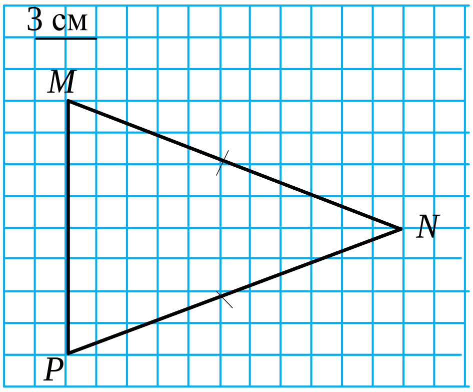
1) Прямые *a* и *b* не параллельны.

2) Прямые *b* и *d* параллельны.

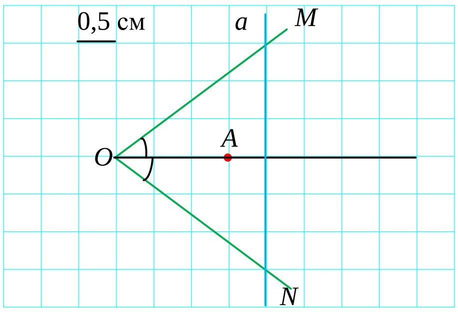
3) Прямые *n* и *b* параллельны.

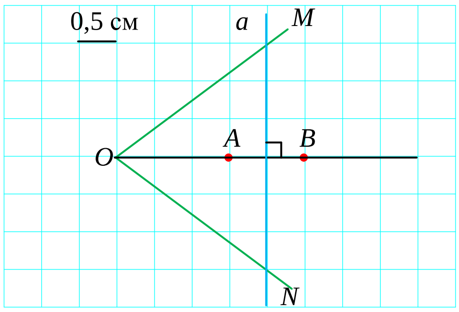
4) Прямая *m* — секущая для прямых *a* и *n*.

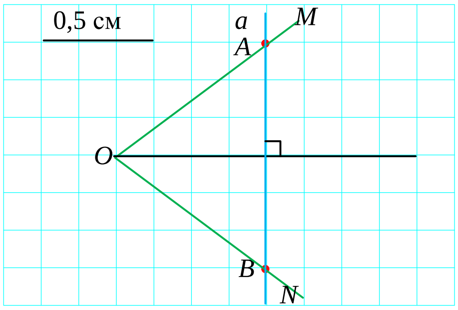
○ 5. На рисунке изображён равнобедренный треугольник MNP. Найдите длину биссектрисы треугольника, проведённую к его основанию.

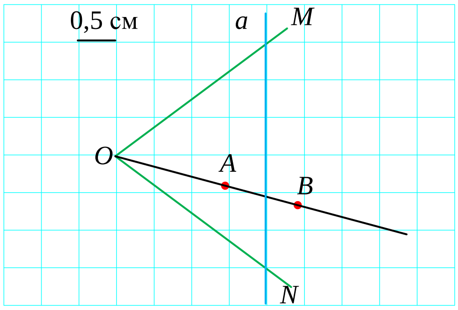


○ 6. Прямая a пересекает стороны угла MON. Укажите номер рисунка, на котором построены все точки, принадлежащие углу, равноудалённые от его сторон и находящиеся на расстоянии 0,5 см от прямой a.

1) 

2) 

3) 

4) 

○ 7. Дано:

ΔABC,

$\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$,

окружность с центром в точке O вписана в ΔABC,

<u>r = 24 см.</u>

Найти: AO

● 8. В треугольнике LMN биссектрисы LA и MP пересекаются в точке O. Найдите сторону LN, если . $\angle MLN = 64°$, $\angle LOP = 58°$, а $LP = 6$ см.

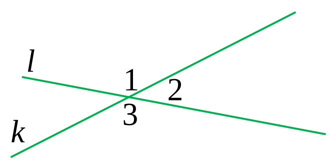
● 9. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL и на ней отмечена середина — точка O. На стороне BC отмечена точка M такая, что $MO \perp BL$. Докажите, что $ML \parallel AB$.

● 10. В равнобедренном треугольнике DEF угол D при основании равен 2α. Медиана EN, проведённая к основанию треугольника, и биссектриса FK треугольника пересекаются в точке O. Найдите угол EOF.

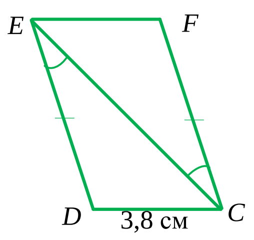
Вариант 2

○1. Длина отрезка CF равна 52 мм. Сколько существует на прямой CF точек, для которых сумма расстояний до концов отрезка AD равна 6 см?

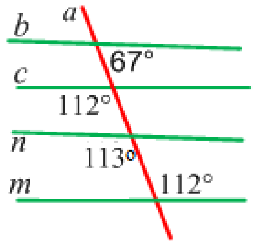
○2. Известно, что прямые l и k пересекаются и $\angle 1 + \angle 3 = 168°$. Найдите угол 2.



○3. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите сторону EF.



○4. Используя данные, приведенные на рисунке, определите, верны ли утверждения. Укажите в ответе номера всех верных утверждений.



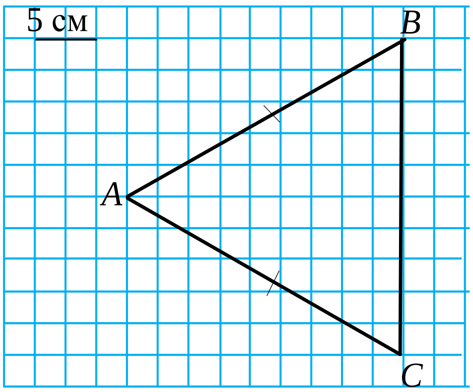
1) Прямые *m* и *c* параллельны.

2) Прямые *n* и *b* не параллельны.

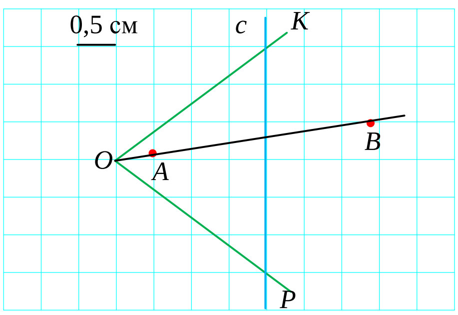
3) Прямые *n* и *c* параллельны.

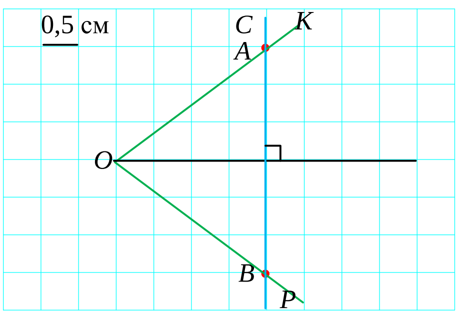
4) Прямая *a* – секущая для прямых *c* и *m*.

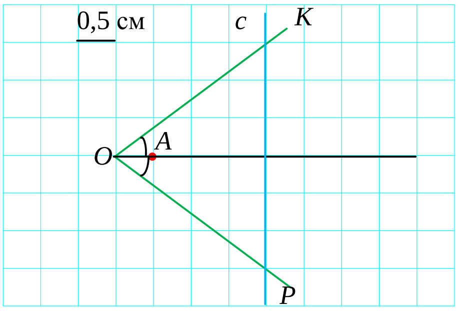
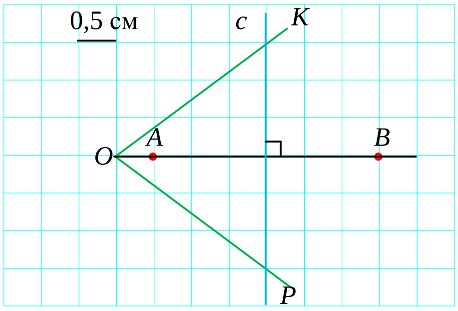
○5. На рисунке изображён равнобедренный треугольник *ABC*. Найдите длину биссектрисы треугольника, проведённую к его основанию.



○ 6. Прямая *c* пересекает стороны угла *KOP*. Укажите номер рисунка, на котором построены все точки, принадлежащие углу, равноудалённые от его сторон и находящиеся на расстоянии 1,5 см от прямой *c*.

1) 

2) 

3)  4) 

○ 7. Дано:

ΔABC,

$\angle C = 90°$,

$\angle B = 60°$,

окружность с центром в точке O вписана в ΔABC,

$r = 18$ см.

Найти: BO

● 8. В треугольнике ADC биссектрисы CN и DM пересекаются в точке O. Найдите сторону AC, если . $\angle CDA = 44°$, $\angle COM = 56°$, а $CM = 9$ см.

● 9. В треугольнике EFD проведена биссектриса EA и на ней отмечена середина – точка O. На стороне EF отмечена точка C такая, что $CO \perp EA$. Докажите, что $DE \parallel AC$.

● 10. В равнобедренном треугольнике PLK угол K при основании равен 4α. Медиана LB, проведённая к основанию треугольника, и биссектриса PA треугольника пересекаются в точке O. Найдите угол POL.

1.4.4. Пример итоговой контрольной работы по вероятности и статистике

1.4.4.1. Спецификация контрольно-измерительных материалов для оценки достижения планируемых результатов обучения по вероятности и статистике в 7 классе на углубленном уровне

Назначение работы: определение соответствия образовательных результатов освоения учащимися учебного курса «Вероятность и статистика» 7 класса на углубленном уровне.

Документы, определяющие нормативно-методическую базу контрольной работы:

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 года № 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования»);
2. Примерная рабочая программа основного общего образования. Математика. Углублённый уровень (одобрена ФУМО 29.04.2022 года протокол №2/22).

Структура работы

Всего в работе 6 заданий, среди них 4 заданий обязательного уровня и 2 задания повышенного уровня освоения курса.

Задания обозначены в работе специальными значками:

○ – задание обязательного уровня;

● – задание повышенного уровня.

Распределение заданий по разделам содержания приведено в таблице 12.

Таблица 12

Распределение заданий по разделам содержания

Название раздела содержания	*Число заданий*
Представление данных	2
Описательная статистика	2
Случайная изменчивость	1
Логика	1
Всего	6

План контрольной работы приведен в таблице 13.

Таблица 13

План варианта работы

Задание	*Проверяемые умения*	*Уровень освоения*	*Примерное время выполнения, мин*
Общий текст	Смысловое чтение текста	Обязательный	5
1	Представлять данные в виде таблиц	Обязательный	3
2	Описывать и интерпретировать реальные числовые данные, представленные в таблицах	Обязательный	3
3	Использовать для описания данных статистические характеристики: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах	Обязательный	4
4	Иметь представление о логических утверждениях и высказываниях, уметь формулировать условные утверждения при решении задач	Обязательный	5
5	Использовать для описания данных статистические характеристики: среднее арифметическое	Повышенный	5
6	Иметь представление о случайной изменчивости на примерах результатов измерений; использовать	Повышенный	5

	для описания данных статистические характеристики: среднее арифметическое, наибольшее и наименьшее значения, размах		

Время выполнения работы

На выполнение контрольной работы отводится 30–40 мин.

Оценивание результатов выполнения работы

Критерии оценивания должны быть открыты для учащихся с тем, чтобы они понимали, как и за что выставляется та или иная отметка.

Контрольная работа и, соответственно, критерии оценки составлены таким образом, чтобы у учащихся было «право на ошибку» при выполнении работы как на отметку «3», так и на отметку «5».

Предлагаемые критерии оценивания носят рекомендательный характер, и могут корректироваться учителем в зависимости от особенностей класса. При этом, однако, целесообразно сохранять два описанных выше требования: надо, чтобы учащимся было объяснено, за что будет выставляться та или иная отметка; надо, чтобы у учащихся сохранялось «право на ошибку».

Задание 1 считается выполненным полностью (начисляется 2 балла), если верно заполнены **все** ячейки таблицы, считается выполненным частично (1 балл), если одна ячейка заполнена неверно, остальные – верно.

Задание 2 считается выполненным полностью (начисляется 1 балл), если дан верный ответ и приведено верное решение.

Задание 3 считается выполненным полностью (начисляется 2 балла), если ученик выписал номера **всех** верных равенств, считается выполненным частично (1 балл), если одно утверждение выбрано неверно, остальные – верно.

Задание 4 считается выполненным полностью (начисляется 1 балл), если дан верный ответ и приведен верный контрпример.

Задания 5 и 6 считаются выполненными полностью (начисляется по 2 балла), если дан верный ответ и приведено верное решение, считаются выполненными частично (1 балл), если при верном ходе решения допущена одна вычислительная ошибка или описка.

Максимальное число баллов за контрольную работу – 10.

В таблице 14 приводится рекомендуемое наименьшее число заданий, которые необходимо выполнить, чтобы получить отметки «3», «4» и «5».

Таблица 14

Рекомендации по оцениванию выполнения контрольной работы

Отметка	отметка «3»		отметка «4»		отметка «5»	
Получено баллов	○	●	○	●	○	●
	4	–	6 5 4	– 1 2	5	3

В таблице 15 даются ответы и решения к заданиям контрольной работы.

Таблица 15

Ответы и решения к заданиям контрольной работы

Номер задания	*Ответы и решения*
1	(see table below)
2	Ответ: Команда А. Решение: Очки команды А: 3+3+0+3+3+1=10, очки команды В: 0+0+3+0+1=4, команда А набрала больше очков.
3	Ответы: 1) верно (6+7+5+5+4=27; 27:5=5,4 > 5); 2) неверно (4,5,5,6,7, медиана равна 5); 3) верно; 4) неверно; 5) неверно; 6) верно.

Задание 1:

Команды	*Матчи*	*Победы*	*Ничьи*	*Поражения*	*Забито (З)*	*Пропущено (П)*	*Разница (З - П)*
А	5	3	1	1	16	11	5
В	5	1	1	3	11	16	-5

4	Ответ: Неверно. Контрпример: Результаты пяти матчей: 1:0, 1:0, 1:0, 1:0, 0:10; команда А набрала 12 очков и победила, разница забитых и пропущенных: 4-10=-6, проигравшая команда набрала 3 очка, ее разница равна 10-4=6.
5	Ответ: 186,2 см. Решение: Общий рост игроков команды А – 189 х 20 = 3780 (см), команды В – 25 х 184 = 4600 (см), игроков двух команд – 3780 + 4600 = 8380 (см); средний рост всех игроков – 8380 : 45 = 186,2 (см).
6	Ответ: В среднем команда А забивает в матче на 1 шайбу больше, чем пропускает, отклонения от среднего не превышают 3 шайб, размах разницы равен 5 шайбам. Решение: Разница заброшенных и пропущенных шайб: 4, 1, -1, 1, 0; размах разницы равен 5; среднее арифметическое разницы: 5 : 5 = 1. Отклонение от среднего арифметического: 3, 0, -2, 0, -1.

1.4.4.2. Итоговая контрольная работа по курсу «Вероятность и статистика. Углубленный уровень». 7 класс

Прочитайте текст «Финальные матчи хоккейного турнира» и выполните задания 1–6.

Финальные матчи хоккейного турнира

По правилам хоккейного турнира в финальной части две лучшие команды должны сыграть друг с другом 5 матчей. Победа в турнире присуждается той команде, которая по итогам пяти матчей наберет большее количество очков.

В таблице показано, как начисляются очки командам по итогам матча:

Результат игры	*Очки*
Победа	3
Ничья	1
Поражение	0

В финале играли команды А и В. Матчи закончились со счетом:

5:1; 2:3; 4:3; 3:2; 2:2.

Первое число показывает количество шайб, забитых командой А, второе число – количество шайб, забитых командой В:

Забила команда А Забила команда В

5 : 1

○ **1**. Заполните таблицу по результатам пяти матчей финального турнира.

Команда	*Матчи*	*Победы*	*Ничьи*	*Поражения*	*Забито (З)*	*Пропущено (П)*	*Разница (З - П)*
А	5						
В	5						

○ **2.** Какая команда победила в турнире?

Дайте ответ и приведите решение.

○ **3.** Спортивный журналист проанализировал результаты всех матчей команды А и команды В, сыгранных в финальном турнире, а затем высказал несколько суждений. Какие из этих суждений являются верными?

Запишите номера всех верных суждений.

1) В среднем за один матч обе команды вместе забрасывали не менее 5 шайб.
2) Медиана числа шайб, заброшенных в матче, равна 7.
3) Команда А забросила больше шайб, чем пропустила.
4) Разница числа заброшенных и числа пропущенных шайб в каждом матче не превышала трех.
5) Самым результативным по общему числу заброшенных шайб стал первый матч финального турнира.
6) В каждом матче турнира команды забрасывали хотя бы по одной шайбе.

○ **4.** Верно ли, что разница общего числа заброшенных и общего числа пропущенных шайб у победившей в турнире команды всегда положительна, а у проигравшей команды – всегда отрицательна?

Если это утверждение верно, то объясните, почему. Если утверждение неверно, то приведите контрпример.

Дайте ответ и приведите решение.

● **5.** В финальных матчах турнира в команде А приняли участие 20 хоккеистов, и их средний рост равен 189 см, в команде В – 25 хоккеистов, их средний рост равен 184 см. Найдите средний рост всех хоккеистов финального турнира.

Дайте ответ и приведите решение.

● **6.** Охарактеризуйте изменчивость для команды А такого показателя результата матча как разница числа заброшенных и пропущенных шайб, используя размах, отклонение от среднего арифметического и максимальное отклонение от среднего.

Дайте ответ и приведите решение.

РАЗДЕЛ II. ОРГАНИЗАЦИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ 7–9-Х КЛАССОВ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ ПО МАТЕМАТИКЕ УГЛУБЛЕННОГО УРОВНЯ

2.1. Математическое моделирование при решении математических задач

2.1.1. Понятие «математическое моделирование»

С раннего детства каждый человек встречается с различными моделями, выполняет действия моделирования, порой, не осознавая этого. Например, строят дома из кубиков, собирают модели из конструктора. Затем на уровне школьного образования практически при изучении каждого школьного предмета учащиеся строят модели в той или иной форме. Например, при изучении русского языка морфемный разбор слова по составу или фонетический разбор слова и представление разбора в виде схемы, синтаксический разбор предложения по частям (рис. 1). Учитель русского языка может предложить учащимся обратный переход – составление слова или предложения, соответствующего конкретной модели. При изучении географии учащиеся составляют географические карты, например, климатические с использованием различных знаков, которые в свою очередь также являются моделями, отражающими определённые погодные условия. Конкретизируем понятие «моделирование» для школьного курса математики.

Рис. 1. *Примеры моделей по русскому языку*

Моделирование – общенаучный метод познания окружающего мира, тех или иных сторон материальной действительности (рис. 2) [Введение в математическое моделирование: уч. пособие / под ред. П. В. Трусова. – 2007.

– С. 16].Таким образом, моделирование является одним из методов научного познания, на основе которого в единстве с другими методами строится особый объект – абстрактное или обобщенное представление, схема изучаемого процесса, явления. Этот объект и есть модель. Предметом моделирования может быть окружающая среда и реальных процессы, происходящие в жизни людей, системы компонентов природной среды, социальные процессы.

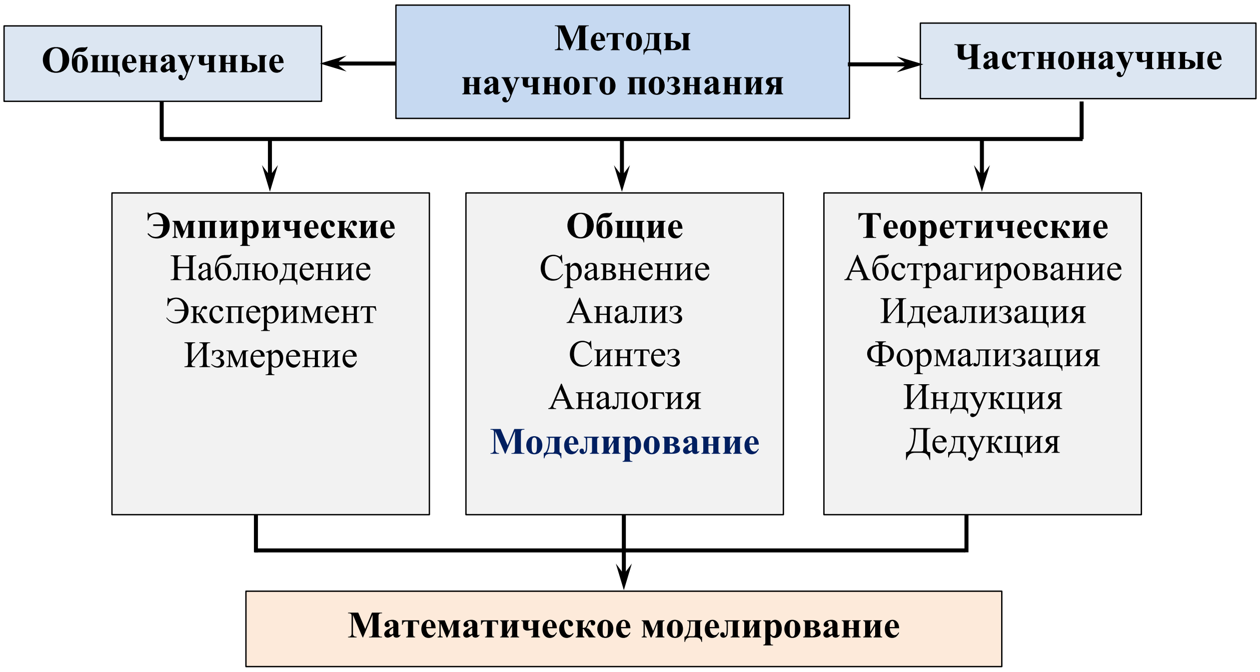


Рис. 2. *Методы научного познания*

Л. М. Фридман рассматривает понятие модели в широком смысле. Он пишет: «моделью некоторого объекта A (оригинала, прототипа) называется объект B, «в каком-то отношении подобный (аналогичный) оригиналу A, но отличающийся от него, выбранный или построенный субъектом K» [Фридман Л. М. Теоретические основы методики обучения математике. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 248 с. – С. 210]. Это позволяет рассматривать понятие моделирования с позиции математики и говорить о математическом моделировании реальных ситуаций.

Математическое моделирование – моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели проводится с использованием математического аппарата.

Современная наука достаточно широко использует математическое моделирование при изучении объектов. Практически все естественные области науки (астрономия, биология, география, физика, химия и др.), общественные науки (управление, социология, экономика и др.) заменяют изучаемый объект математической моделью, соответствующей своей области, исследуют её с помощью методов математики. Процесс моделирования также имеется практически во всех видах деятельности человека, в том числе и в профессиональной сфере, например, политиков и предпринимателей, экономистов и финансистов и др. Поэтому для личностной успешной реализации в жизни выпускников школы важно, чтобы у них были сформированы умения математического моделирования.

Ценность научного познания – одно из направлений личностного развития обучающихся (табл. 1) – характеризуется готовностью к осуществлению проектной и исследовательской деятельности. Осуществление проектной и исследовательской деятельности базируется на умении выполнения исследовательских действий, входящих в универсальные познавательные действия (табл. 2). Одним из важных умений для осуществления проектной и исследовательской деятельности является умение перевода проблемы (задачи) реальных ситуаций в математическую сферу и построения соответствующей математической модели, т. е. математическое моделирование.

А. А. Ляпунов, выдающийся советский математик, занимающийся математической лингвистикой, определяет математическое моделирование, как исследование объекта, при котором изучается не сам объект, а его математическая модель, являющаяся математическим представлением реальности[1]. Российские математики А. А. Самарский и А. П. Михайлов рассматривают математическую модель как «„эквивалент“ объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства – законы,

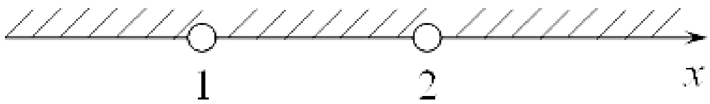
[1]Блехман И. И. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов, с примерами из механики: учебное пособие / И. И. Блехман, А. Д. Мышкис, Н. Г. Пановко. – Москв : УРСС, 2006.– 376 с.

которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям[2]». А. И. Короткий и Л. Г. Гальперин называют процесс формулировки математической модели постановкой задачи[3].

При изучении учебного предмета «Математика» на уровне основной и средней школы под математической моделью понимается уравнение (неравенство), их совокупность или система, график или чертеж, план или схема, а также математические отношения, например, принадлежность, равенство, подобие, параллельность, перпендикулярность, отражающие свойства изучаемого объекта или явления. Математическая модель, описывающая объект, может иметь словесную, аналитическую, графическую или геометрическую форму, например, область определения функции (табл. 16).

Таблица 16

Пример математической модели в разных формах

Функция	*Область определения функции*
$y = \dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$ $y = f(x)$	$x < 1,\ 1 < x < 2, x > 2$ $D(f)\colon (-\infty; 1)\cup(1; 2)\cup(2; +\infty)$ 

Таким образом, под математическим моделированием понимается описание объекта на математическом языке. Математическая модель строится на основе математических отношений: принадлежность, равенство, подобие, параллельность, перпендикулярность, отражающих свойства изучаемого объекта или явления. Процесс исследования модели базируется на использовании математического аппарата.

[2]А. А. Самарский и А. П. Михайлов Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с. – с. 7–8.
[3]Математическое моделирование /А. И. Короткий, Л. Г. Гальперин – Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2005. – 102 с.].

2.1.2. Виды математической модели и предписание для составления модели и ее исследования

«Конструирование модели начинается со словесно-смыслового описания объекта или явления. … Данный этап можно назвать формулировкой предмодели» (Самарский А. А., Михайлов А. П.).

Процесс построения математической модели и его исследование базируется на выполнении мыслительных операций в соответствии с определенной логикой, в частности, сравнении, анализе и синтезе, абстрагировании и обобщении (табл. 5). Отметим, что анализ и синтез – две взаимосвязанные мыслительные операции, так как в процессе анализа сложный объект разделяется на составные части, а синтез направлен на восстановление объекта из частей. Аналогично, абстракция и обобщение – взаимосвязанные компоненты единого мыслительного процесса.

Таблица 17

Мыслительные операции при математическом моделировании

Направление	*Характеристика*
Сравнение	Выявление существенных признаков объектов, родового сходства и видового отличия между объектами, математических отношений между объектами
Анализ	Выделение составляющих частей сложного объекта или характеристик частей с последующим их сравнением.
Синтез	Соединение составляющих частей в сложный объект, на основании существенных связей и отношений.
Абстрагирование	Выделение существенных свойств объекта и его связей и отвлечение от несущественных свойств.
Обобщение	Объединение предметов и явлений по их общим и существенным признакам.
Суждение	Результат мыслительного процесса, отражающий связь между объектами в форме утверждения или отрицания.
Рассуждение	Работа над суждениями.
Умозаключение	Вывод на основе нескольких суждений.

Как отмечено выше, при изучении математики под математической моделью понимается уравнение (неравенство), их совокупность или система, график или чертеж, план или схема, а также математические отношения, например, принадлежность, равенство, подобие, параллельность, перпендикулярность, отражающие свойства изучаемого объекта или явления. Вид модели зависит от цели ее составления. Классифицируем модели (рис. 3) в зависимости от цели создания модели:

1) восприятие изучаемой (моделируемой) реальной ситуации (объекта, процесса) через её модель, более удобной для её понимания, осознания;
2) иллюстрация (представление) реальной ситуации (объекта) для лучшего её понимания, осознания;
3) интерпретация (описание) реальной ситуации (процесса, объекта) через описание модели;
4) исследование реальной ситуации (процесса, объекта) через исследование его модели.

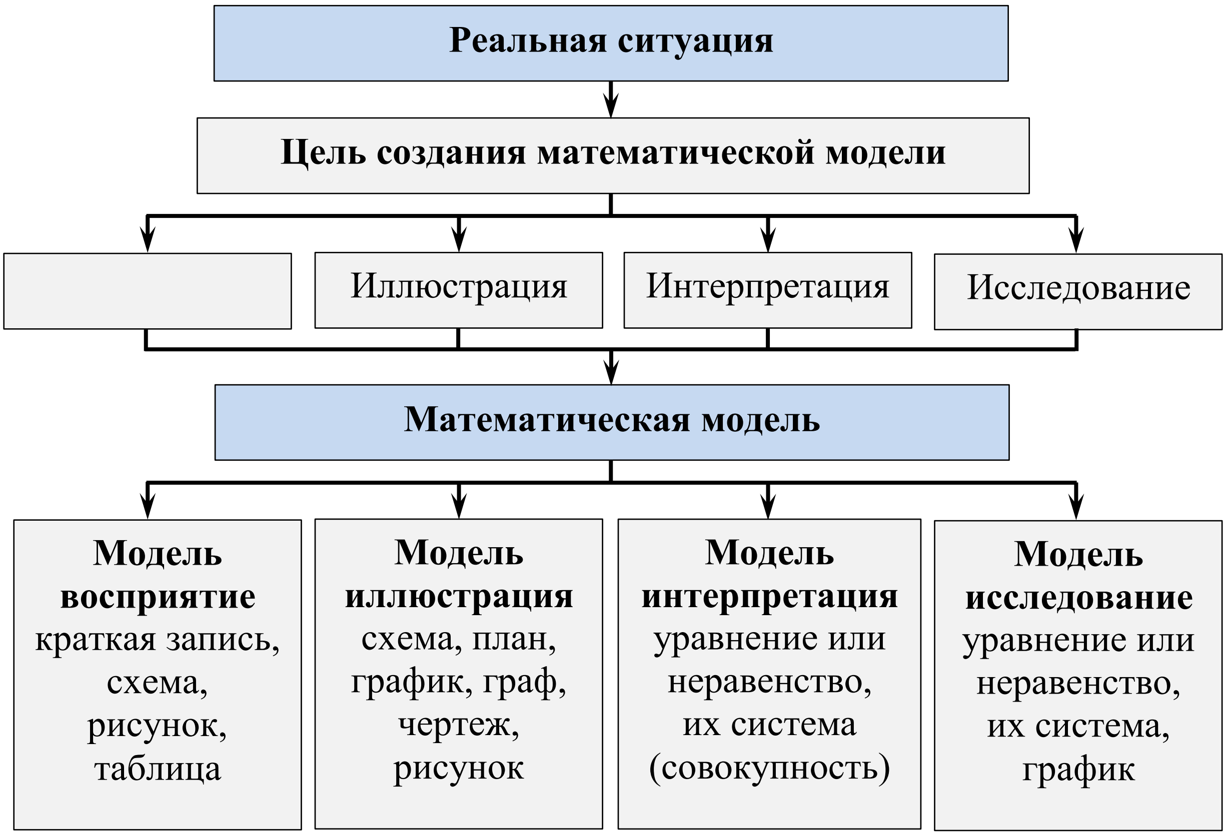


Рис. 3. *Классификация моделей по цели ее создания*

В УМК практически отсутствует понятие модели и математического моделирования, в обучении часто под моделью понимается уравнение или неравенство, их системы. Ранее было отмечено, что моделирование – процесс познания окружающей действительности. Поэтому важно, чтобы учитель при организации изучения математики на углублённом уровне обращал внимание не только на умения работать с моделью, т.е. на решение уравнения или неравенства. А специально организовывал деятельность учащихся в направлении формирования понятия «математическая модель», умения постановки цели создания модели, выявления наиболее удобного вида модели и умений оперировать этим понятием. Отметим, что модель одно вида может быть сконструирована с разными целями.

В процессе построения математической модели ситуации и её исследования выделим основные этапы:

1) формулирование проблемы (задачи) заданной ситуации на языке математики;
2) конструирование математической модели, соответствующей сформулированной проблеме (задаче) заданной ситуации;
3) исследование модели с использованием математического аппарата;
4) интерпретация математических результатов исследования модели.

Учитывая состав познавательных УУД и характеристики мыслительных операций (табл. 2 и 17), методы математического моделирования (рис. 2), конкретизируем действия, выполняемые в процессе моделирования, и составим предписание для составления математической модели и её исследования (табл. 18).

Процесс математического моделирования в явном виде выполняется учащимися при решении текстовых задач алгебраическим способом – составление уравнения или системы уравнений; при решении геометрических задач – изображение рисунка (чертежа).

Таблица 18

Предписание для составления математической модели и ее исследования

<table>
<tr><td colspan="2">Действие</td></tr>
<tr><td colspan="2">1 этап. Сформулировать проблему (задачу) заданной ситуации на математическом языке:</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Выявить возможность формулирования проблемы (задачи) ситуации на математическом языке:</td></tr>
<tr><td>1.1</td><td>выявить условие и требование проблемы (задачи) ситуации;</td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>выявить основную и разъяснительную части условия;</td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>сравнить и проанализировать известные величины и отношения между объектами;</td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>выявить неизвестные величины и отношения между объектами;</td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>соотнести известные и неизвестные величины и отношения с математическими понятиями, обеспечивающими возможность перехода к математическим объектам.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Перевести проблему ситуации на математический язык</td></tr>
<tr><td colspan="2">2 этап. Сконструировать математическую модель, соответствующую проблеме (задаче) заданной ситуации:</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Осуществить поиск путей решения математически сформулированной проблемы (задачи), применив знания о математических понятиях:</td></tr>
<tr><td>3.1</td><td>выявить математические понятия, их свойства и признаки, соответствующие известным величинам и отношениям проблемы (задачи) заданной ситуации;</td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>выявить математические понятия, их свойства и признаки, соответствующие неизвестным величинам и отношениям проблемы (задачи) заданной ситуации;</td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>выявить взаимосвязь известных и неизвестных математических понятий;</td></tr>
<tr><td>3.4</td><td>выводить следствия из условия и/или требования до тех пор, пока результатом не станет неизвестные величина или отношение;</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Фиксировать процесс поиска путей решения, составляя схему поиска.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Проанализировать пути решения математической модели и выбрать наиболее рациональный путь решения.</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Записать математическую модель в символьной, аналитической и/или геометрической формах, используя взаимосвязи известных и неизвестных математических понятий, выявленные в п. 3.3,</td></tr>
</table>

3 этап. Исследовать модель с использованием математического аппарата: геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры:
7. Выявить вид сконструированной математической модели.
8. Выявить возможные преобразования математической модели.
9. Выполнить преобразования модели до тех пор пока не получим значения неизвестных переменных или неизвестные математические отношения станут известными.
10. Отобрать из найденных значений переменных или математических отношений те, которые являются решениями сконструированной модели
4 этап. Интерпретировать полученные результаты и соотносить их с заданной ситуацией.
11. Соотнести полученные результаты с условием и требованием проблемы (задачи) заданной ситуации.

Приведём пример математической модели по курсу алгебры.

В примере с целью лучшего восприятия и иллюстрацииреальной ситуации составлена графическая модель текста (рис. 4), в котором описана некоторая ситуация. Этот текст может быть условием задачи повышенного уровня сложности по алгебре в 9 классе. Реальная ситуация, описанная в задаче, отражена на рисунке в динамике происходящего. Такой подход к изображению ситуации помогает учащимся в нахождении соответствующей геометрической модели и понимании изменения отношений между объектами. Учитель к тексту может составить вопросы, например, 1) найдите скорости велосипедистов; 2) встретятся ли велосипедисты на перекрестке; 3) кто из велосипедистов первым приедет на перекресток. Эти вопросы будут основой для проведения исследования.

Пример 1. Алгебра, 9 класс.

По двум пересекающимся дорогам под прямым углом, по направлению к перекрестку движутся два велосипедиста. В начальный момент первый велосипедист находился в 60 км от перекрестка, а второй – в 80 км. Через 1 час 30 минут расстояние между велосипедистами стало равно 70 км, а ещё через 60 минут – 50 км.

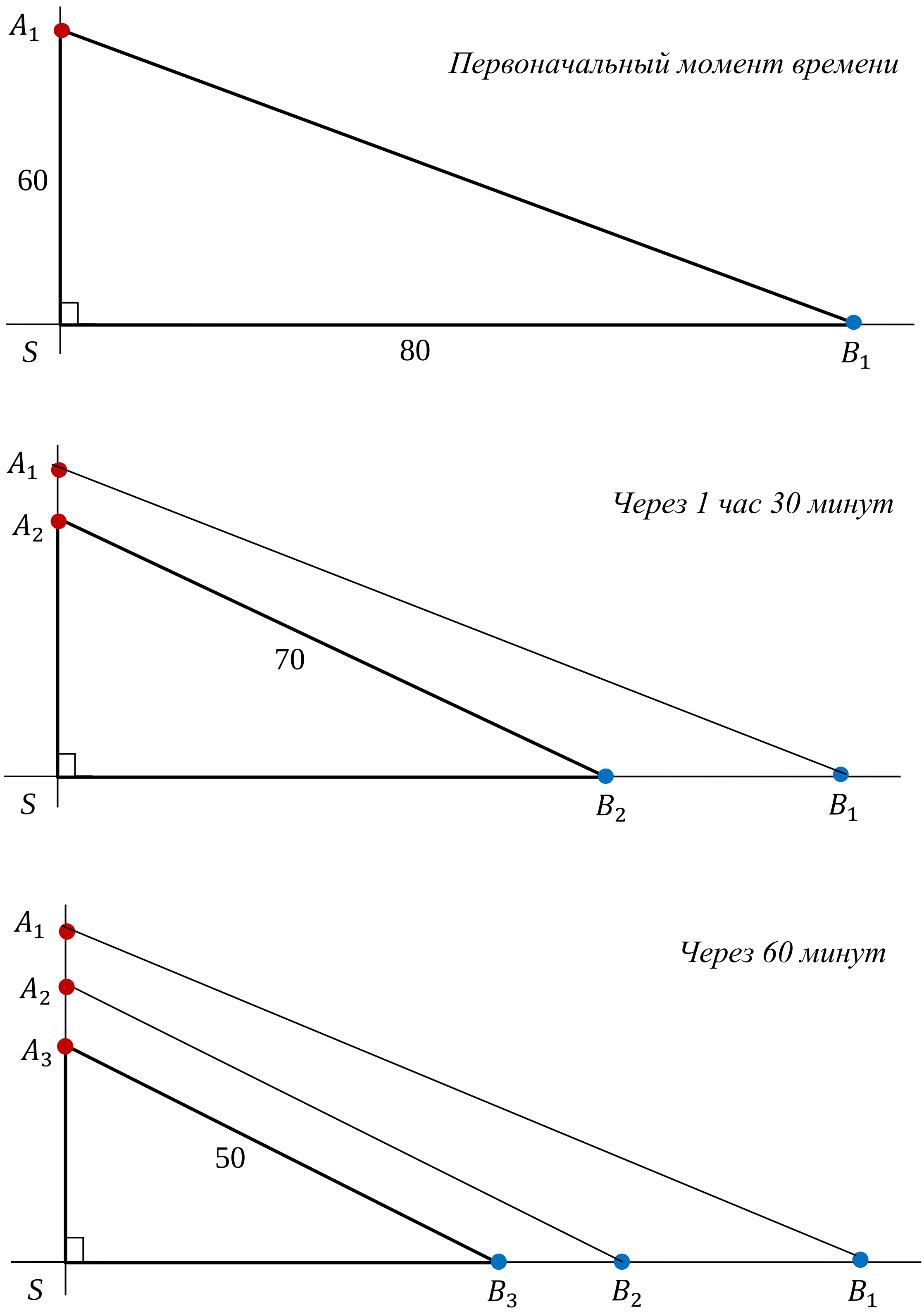


Рис. 4. *Математическая модель, пример 1*

2.1.3. Конструирование математической модели и её исследование при решении текстовых задач

2.1.3.1. Рекомендации к составлению модели при решении задач

Аналитический способ решения текстовых задач основан на составлении математической модели ситуации, описанной в задаче. Поэтому текстовые задачи можно рассматривать как средство формирования у учащихся метапредметных результатов обучения, в частности познавательных и регулятивных УУД, умений составления математической модели некоторой ситуации.

Отметим, что текстовые задачи, входящие во вторую часть контрольно-измерительных материалов (КИМ) государственной итоговой аттестации за курс основной и средней школы – ОГЭ и ЕГЭ профильного уровня, относятся к задачам повышенного уровня сложности. «Верно построенная математическая модель» – один из критериев оценивания задания, связанного с решением текстовой задачей. Для успешного выполнения этого задания важно, чтобы у учащихся были сформированы умения построения математической модели, соответствующей ситуации, описанной в задаче, на высоком уровне.

Анализ типичных ошибок, которые обучающие допускают при решении текстовых задач, позволяет выделить ошибки связанные с:

– непониманием процесса, описываемого в задаче;

– неверным выполнением действий, необходимых для составления математической модели описанной ситуации;

– непониманием математических отношений между объектами;

– установлением неверного математического отношения между величинами, геометрическими фигурами;

– неверным составлением математической модели соответствующей ситуации;

– недостаточной сформированностью умения работать с математической моделью;

– вычислительными ошибками;

– запись бесконечной непериодической дроби в виде конечной десятичной дроби.

Рассмотрим организацию деятельности учащихся, направленную на формирование у обучающихся умений математического моделирования при решении текстовых задач[4] повышенного уровня сложности, отразив этап построения математической модели, в соответствии с предписанием (табл. 4).

2.1.3.2. Составление модели при решении текстовых задач на движение

Пример 2. Текстовая задача на движение, 9 класс.

Два поезда отправляются из пунктов A и B навстречу друг другу. Если поезда выйдут одновременно, то они встретятся через 3 ч 45 мин. Если поезд из A выйдет на 2 ч раньше, чем поезд из B, то встреча произойдёт на середине пути. Найдите скорости поездов и расстояние между A и B, если известно, что скорость одного поезда на 40км/ч больше скорости другого.

1 этап. Формулирование ситуации на математическом языке.

На этом этапе учитель организовывает анализ текста задачи учащимися. При необходимости учитель оказывает помощь: задаёт наводящие вопросы; предоставляет предписание для составления математической модели ситуации; организовывает фронтальное обсуждение текста задачи.

В результате этой деятельности учащиеся:

1) определили, что это задача на движение по суше;

2) структурировали текст задачи, выявив условие и требование задачи;

---

[4] Тексты задач для примеров: 1) Открытый банк задач ОГЭ и ЕГЭ. – ФГБНУ «ФИПИ». – [Электронный доступ]. – URL: https://fipi.ru/2) ОГЭ. Математика и ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационный варианты. – 2023.
Решение задач – авторское.

3) определили, что основной частью условия является то, что поезда движутся навстречу друг другу, т. е. встречное движение, и выдвинули гипотезу, что составление математической модели может быть основано на понятии «скорость сближения»;

4) выявили, что в разъяснительной части условия описываются две ситуации: а) поезда выехали одновременно; б) сначала выехал один поезд, а через некоторое время другой;

5) составили модель условия задачи в виде схемы – перевели условие задачи в схему, отражающую ситуации в динамике (рис. 5).

2 этап. Конструирование аналитической модели, соответствующей проблеме заданной ситуации.

Учитель организовывает составление модели интерпретации. Показывает логически верное построение высказываний.

Рассуждения учащихся:

1) так как задача на движение по суше, то ситуации характеризуется тремя параметрами: скоростью, временем и расстоянием, взаимосвязанными формулой пути $S = vt$;

2) т. к. встречное движение, то с ситуацией связано понятие “скорость сближения” $v_{\text{сближения}} = v_1 + v_2$;

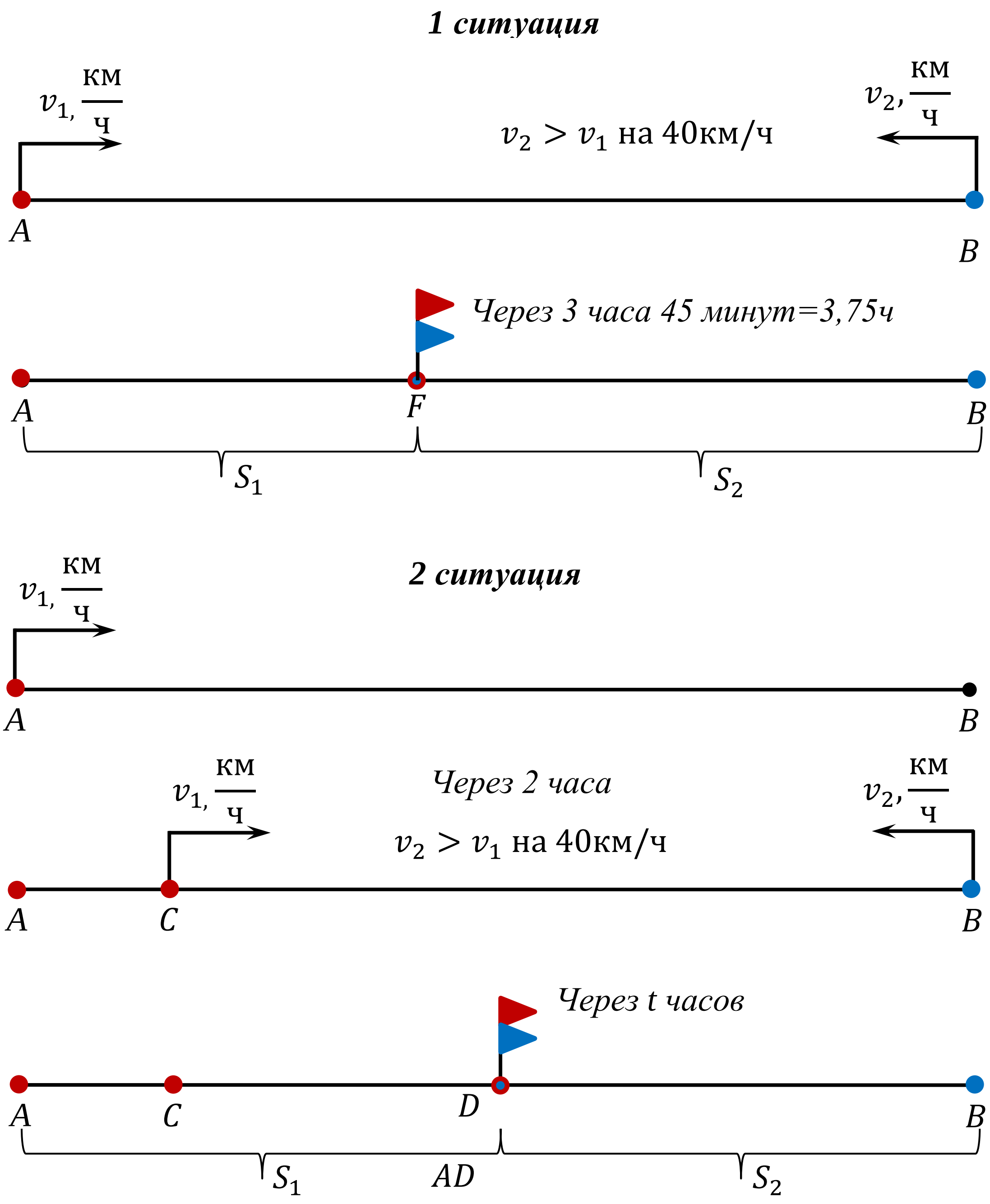


Рис. 5. *Модель иллюстрация описываемой ситуации, пример 2*

Дальнейшие рассуждения по составлению модели учащиеся могут оформить в виде цепочки рассуждений и/или фиксируя результаты рассуждений в таблице. Прокомментируем процесс составления модели.

3) Так как в первой ситуации поезда вышли одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встретились через 3 ч 45 мин, то время

движения каждого поезда равно 3,75 ч. Внесём эти известные величины в соответствующие ячейки таблицы.

4) Так как неизвестны скорости движения поездов, время движения поездов во второй ситуации, расстояния, которые проехали поезда в каждом случае, то пусть время первого поезда x км/ч, время движения второго поезда во второй ситуации y ч, $x > 0, y > 0$.

1 ситуация	v, км/ч	t, ч	S, км
Первый поезд (из A в B)	x	$3{,}75$	$3{,}75x$
Второй поезд (из B в A)	$x + 40$	$3{,}75$	$3{,}75(x + 40)$
			$AB = S_1 + S_2$
2 ситуация	v, км/ч	t, ч	S, км
Первый поезд (из A в B)	x	$y + 2$	$x(y + 2)$
Второй поезд (из B в A)	$x + 40$	y	$(x + 40)y$
			$S_1 = S_2 = \frac{AB}{2}$

Далее учащиеся выражают через введённые переменные все неизвестные величины. После заполнения всех ячеек таблицы ищут условие для составления аналитической модели – модели интерпретации.

5) Так как в первой ситуации поезда выехали одновременно и встретились, то расстояние между пунктами равно сумме расстояний, которые проехали поезда, т. е. $AB = S_1 + S_2 = 7{,}5x + 150$

6) Так как во второй ситуации поезда встретились на половине пути, то каждый поезд проехал расстояние равное $\frac{AB}{2} = \frac{7{,}5x+150}{2} = 3{,}75x + 75$

Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} x(y + 2) = (x + 40)y, \\ x(y + 2) = 3{,}75x + 75. \end{cases}$$

Таким образом, моделью интерпретацией – аналитической моделью является система уравнений с двумя переменными.

3 этап. Исследование модели с использованием математического аппарата алгебры.

В результате решения системы получим, что $x_1 = -25, y_1 = -1{,}25$; $x_2 = 60, y_2 = 3$.

4 этап. Интерпретация полученных результатов.

При интерпретации полученных результатов, во-первых, значения переменных, соотносят с тем, какие неизвестные величины (параметры)обозначили за эти переменные (этап 2, п. 4); во-вторых, оценивают полученные значения переменных на соответствие ситуации, описанной в задаче. Находят величины, которые соответствуют требованию задачи. Результат деятельности на этом этапе учащиеся оформляют в форме вывода.

Вывод.

1) Так как $x_1 = -25$, $y_1 = -1{,}25$ и $x > 0, y > 0$, то эти числа не удовлетворяют условию задачи.

2) Так как $x_2 = 60, y_2 = 3$, то скорость первого поезда равна 60 км/ч, а время движения второго поезда во второй ситуации равно 3 часа. Тогда скорость второго поезда равна 100 км/ч, расстояние между пунктами A иB – 600 км.

Ответ: 60 км/ч, 100км/ч, 600 км.

Рассмотрим ещё один пример задачи на движение. Покажем другой подход к составлению математической модели.

Пример 3. *Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 10 км, в 7:00 выехала машина. Проехав 2/3 пути, машина миновала пункт C, из которого в этот момент в пункт A выехал велосипедист. Как только машина прибыла в B, оттуда в противоположном направлении сразу выехал* *автобус и прибыл в А в 9:00. На каком расстоянии от В автобус догнал велосипедиста, если велосипедист прибыл в пункт Ав 10:00 и скорость каждого участника постоянна?*

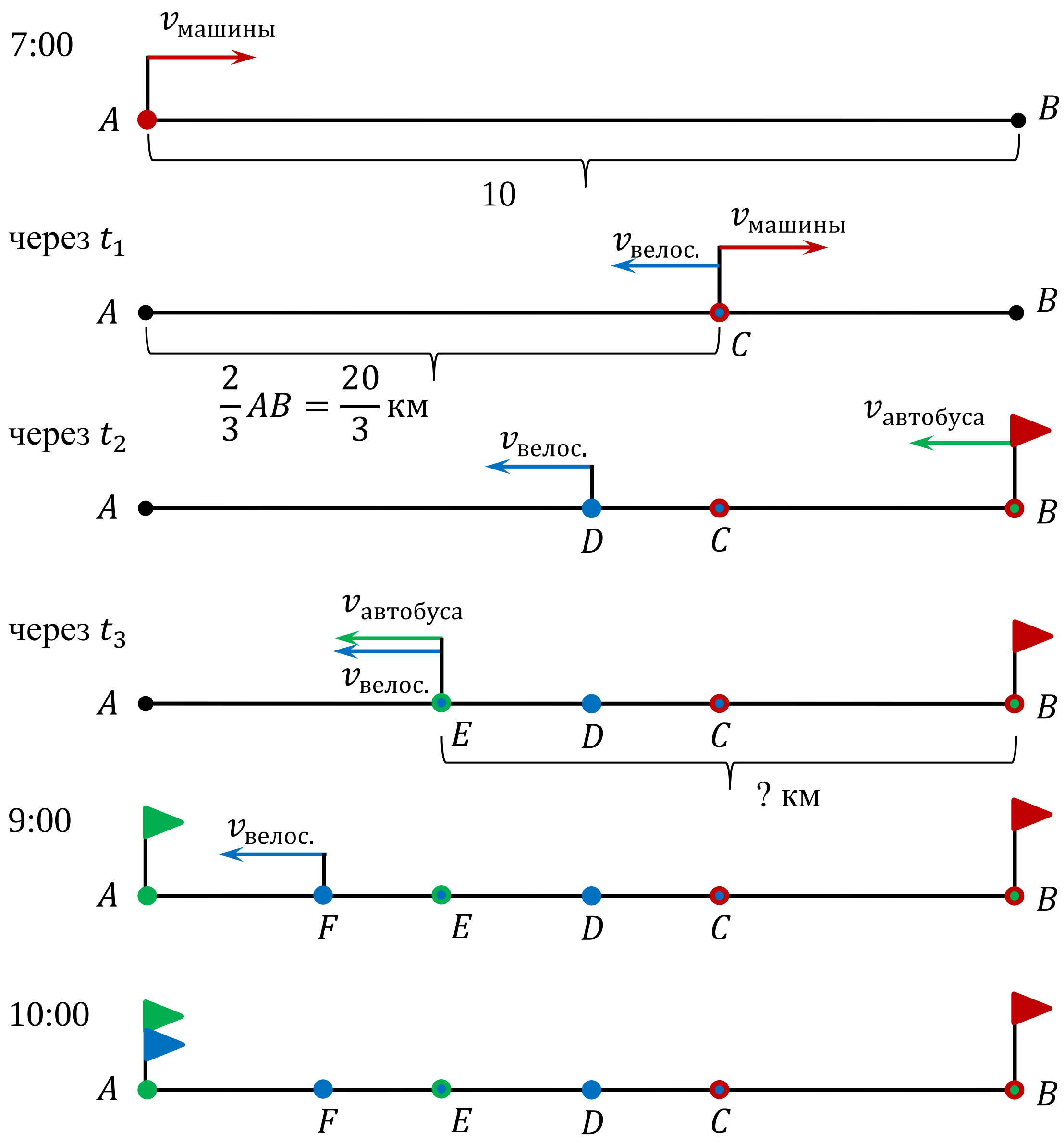


Рис. 6. *Модель описываемой ситуации, пример 3*

Составим с целью лучшего понимания и осознания описываемой ситуации модель восприятия и иллюстрации (рис. 6).

Составим геометрическую модель, соответствующую ситуации, описываемой в задаче (рис. 7).

1) Так как скорость машины, велосипедиста и автобуса постоянны, то пройденный путь каждым участником ситуации выражается линейной функцией, графиком которой является прямая.

2) Так как машина проехала путь из точки A в точку B – расстояние, пройденное автобусом равно отрезку AB. Построим отрезок AB.

3) Так как в момент времени, когда машина проезжала пунктC, она проехала $\frac{2}{3}$ расстояния между пунктами, то $C \in AB$, $AC = \frac{2}{3}AB$.

4) Так как велосипедист выехал из точки C, а автобус из точки B, то автобус проехал расстояние, отображенное отрезком BD, а велосипедист до момента, когда автобус приехал в пункт D – отрезком CF, $BD \cap CF = E$– точка, где автобус догнал велосипедиста.

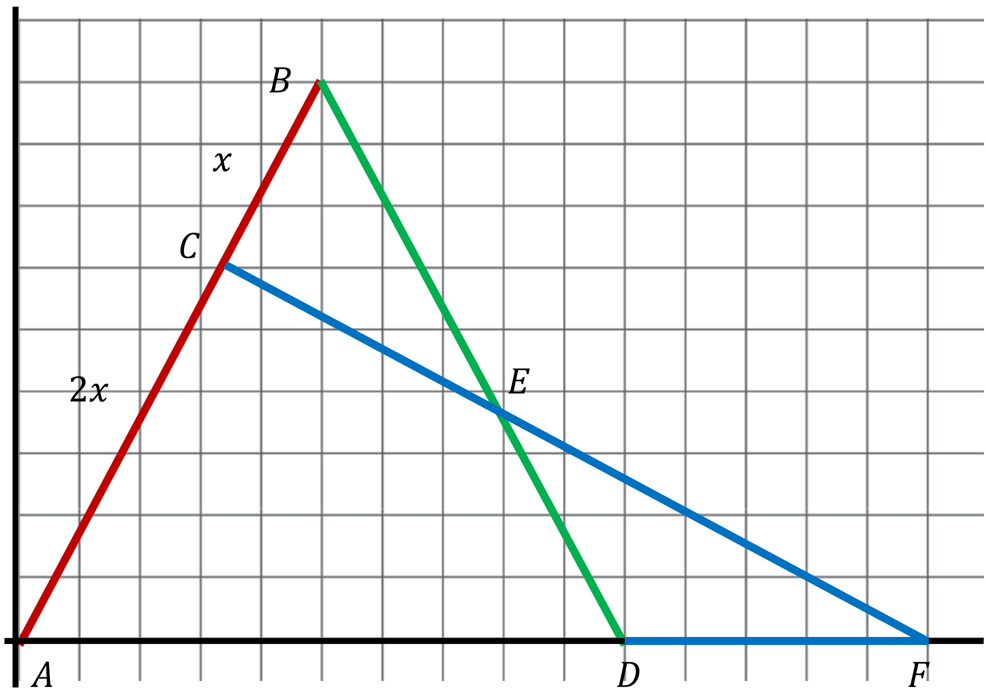


Рис. 7. *Модель иллюстрация описываемой ситуации, пример 3*

Таким образом, построили геометрическую модель, соответствующую ситуации, описанной в задаче. Решение задачи свели к исследованию ΔABD с использованием теоремы Менелая.

2.1.3.3. Построение математической модели при решении задач с экономическим содержанием

Текстовые задачи с экономическим содержанием входят в КИМы ЕГЭ базового и профильного уровней. Учащимся 7–9 классов, изучающим математику на углублённом уровне, вполне посильны задачи на вклады, кредиты и оптимизацию, в которых можно ответить на вопрос задачи, не используя учебный материал, в частности производную, изучаемый в 10–11 классах. Поэтому такие задачи целесообразно включить в содержание обучения математике на углублённом уровне в 9 классах.

На первом этапе обучения решению задач на проценты учитель организует вводное занятие, на котором знакомит учащихся с видами задач с экономическим содержанием, отмечая, чем отличаются реальные процессы вклада и кредита друг от друга; чем отличаются задачи на вклады от задач на кредиты и на оптимизацию. Организует повторение темы «Проценты» и совершенствование знаний и умений перевода процентов в десятичную дробь, актуализирует знания о решении задач на нахождение части от целого и целого по значению дроби. Акцентирует особенности процессов, которые надо учитывать при построении соответствующей математической модели. Рассмотрим составление моделей при решении конкретных задач.

Пример 4. Текстовая задача с экономическим содержанием на вклады.

1 апреля 2017 г. Андрей Петрович положил 10000 рублей на банковский вклад сроком на 1 год с ежемесячным начислением процентов и капитализацией под a% годовых. Это означает, что первого числа каждого месяца сумма вклада увеличивается на одно и то же количество процентов, рассчитанное таким образом, что за 12 месяцев она увеличивается ровно на a%. Через 6 месяцев сумма вклада составила 10500 рублей. Найдите a.

1 этап. Формулирование реальной ситуации на математическом языке.

На этом этапе учитель организует анализ текста задачи, его структурирование в таблице (модель восприятие). Для лучшего понимания учащимися процесса, описанного в аналогичных задачах, составляется модель восприятия и иллюстрации в виде «ленты времени», отражающей реальный процесс, описанный в задаче (рис. 8).

Условие	
Первоначальный вклад	$S_{\text{первонач.}} = S = 10000\text{ руб.} = 10\text{ тыс. руб.}$
Срок вклада	$n = 1\text{ год}$
Процентная ставка	Ежемесячно r; годовая a
	$p = \dfrac{r}{100}$
	$k = 1 + \dfrac{r}{100} = 1 + p$
Через шесть месяцев	10500 руб.
Результат через год	$\boldsymbol{S}_{\text{конечная}} > \boldsymbol{S}$ на $\boldsymbol{a}\%$
Требование: найти	a

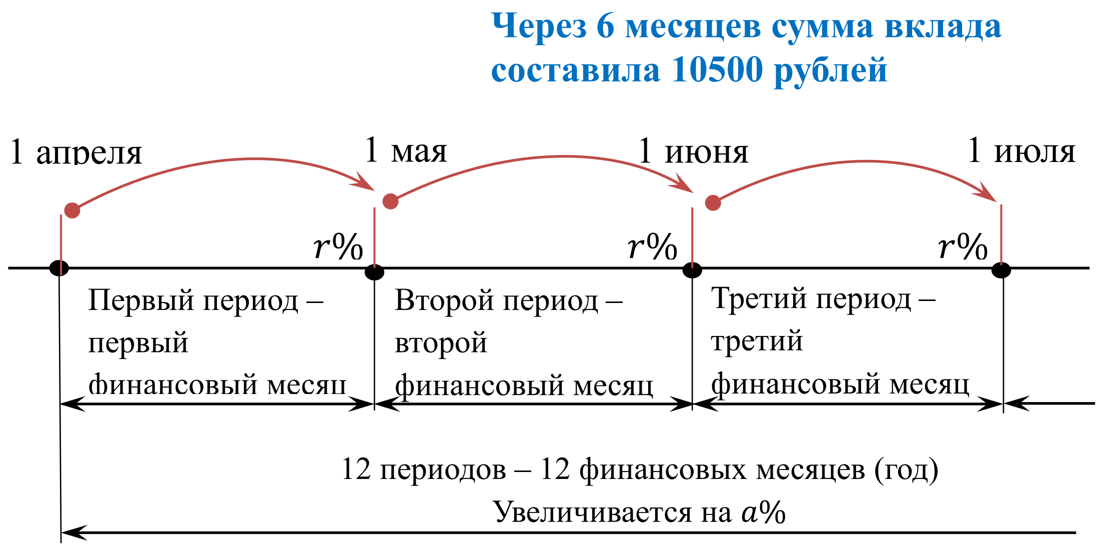


Рис. 8. *Лента времени реального процесса*

При структурировании информации учитель обращает внимание учащихся на коэффициенты p и k, формирует у учащихся понимание, что коэффициент p позволяет вычислить сумму, которую начислит банк (начисленный процент), а коэффициент k – сколько денег будет на счету после начисления процентов.

2 этап. Конструирование математической модели, соответствующей реальной ситуации.

Учитель организовывает процесс составления математической модели. Учащиеся фиксируют результаты своих рассуждений в таблице, отображая реальный процесс начисления процентов на вклад.

Период вклада	*Сумма вклада до начисления %, тыс. руб.*	*Сумма вклада после начисления %, тыс. руб.,* $\beta = 1 + r/100 = 1 + p$
1	10	$10k$
2	$10k$	
…	…	
6	$10k^5$	$10k^6$
…	…	
12	$10k^{11}$	$10k^{12}$

После заполнения выявляют условия для составления математической модели. Рассуждения учащихся:

1) Так как через шесть месяцев вклад равен 10500 рублей = 10,5 тыс. руб., то $10k^6 = 10,5$ (1)

2) Так как вклад положили на один год и сумма вклада увеличивается на одно и то же количество процентов, то $S_{\text{конечная}} = 10k^{12}$ (2);

3) Так как через 12 месяцев сумма вклада увеличивается ровно на a%, то конечная сумма будет равна: $S_{\text{конечная}} = S_{\text{первонач.}} + \frac{a}{100} S_{\text{первонач.}} = 10 + \frac{a}{100} \bullet 10$ (3).

Значит, запишем систему уравнений, которая и будет математической моделью реальной ситуации, описанной в задаче.

$$\begin{cases} 10k^6 = 10{,}5 \\ S_{\text{конечная}} = 10k^{12} \\ S_{\text{конечная}} = 10 + \dfrac{a}{100} \bullet 10 \end{cases}$$

Надо обратить внимание учащихся, что в задачах на вклады и кредиты часто идёт речь о достаточно длительном периоде времени: 12 месяцев, 36 месяцев. При составлении модели важно понимание процесса, что позволяет отображать в таблице не все финансовые периоды, а только те, в которых содержится информация значимая для составления модели.

Рассмотрим задачу на кредиты. Процесс составления модели базируется на умении оперировать понятием «арифметическая прогрессия».

Пример 5. Задача с экономическим содержанием на кредиты.

15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 177,75 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

Представим рассуждения в форме таблиц и прокомментируем процесс их заполнения.

1 этап. Формулирование ситуации на математическом языке.

Условие	
Первоначальный вклад	$S_{\text{первонач.}} = S$ руб.
Срок вклада	$n\ = 24$ месяца
Процентная ставка	$r = 1\%$
	$p = \frac{r}{100} = 0{,}01$
	$k = 1 + \frac{r}{100} = 1{,}01$
Действия	За первые 12 мес. выплачено: 177,75 тыс. руб.
Результат через год	Кредит полностью погашен
Требование: найти	$S_{\text{первоначальный}}$

2 этап. Конструирование математической модели, соответствующей ситуации.

На ***первом*** этапе анализируется условие задачи, выявляются все характеристики процесса, известные величины и неизвестные величины.

На втором этапе рассуждения сводятся к следующему.

1) Так как кредит полностью погашен за 24 месяца, то на начало 25 месяца долг равен 0 рублей.

2) Так как кредит и начисленные проценты выплатили, то сделали переход от суммы $S_{к\ р} = S$, которую взяли в кредит, до полного погашения, т.е. до 0 рублей за 24 месяца.

3) Долг на одну и ту же величину меньше долга предыдущего периода, то долг убывает равными долями $\frac{S}{24}$.

На основе этих утверждений заполняем в таблице столбец «*Сумма долга до начисления %*».

	Сумма долга до начисления %, тыс. руб.	*Сумма долга после начисления %, тыс. руб.*	*Выплаты тыс. руб.*
1	$\boldsymbol{S}$кр		
2	$S - \frac{S}{24} = \frac{23S}{24}$		
3	$\frac{23S}{24} - \frac{S}{24} = \frac{22S}{24}$		
…			
12	$\frac{13S}{24}$		
13	$\frac{12S}{24}$		
…			
24	$\boldsymbol{\frac{S}{24}}$		
25	0		

Начисляя проценты на полученные суммы, заполняем столбец «*Сумма долга после начисления %*». Затем находим суммы выплат и заполняем последний столбец в таблице.

	Сумма долга до начисления %, тыс. руб.	*Сумма долга после начисления %, тыс. руб.*	*Выплаты тыс. руб.*
1	$\boldsymbol{S}$кр	$1{,}01S$	$\mathbf{1,01}\boldsymbol{S}-\frac{\mathbf{23}\boldsymbol{S}}{\mathbf{24}}$
2	$S-\frac{S}{24}=\frac{23S}{24}$	$1{,}01\frac{23S}{24}$	$1{,}01\frac{23S}{24}-\frac{22S}{24}$
3	$\frac{23S}{24}-\frac{S}{24}=\frac{22S}{24}$	$1{,}01\frac{22S}{24}$	
…			
12	$\frac{13S}{24}$	$1{,}01\frac{13S}{24}$	$\mathbf{1,01}\frac{\mathbf{13}\boldsymbol{S}}{\mathbf{24}}-\frac{\mathbf{12}\boldsymbol{S}}{\mathbf{24}}$
13	$\frac{12S}{24}$	$1{,}01\frac{12S}{24}$	
…			
24	$\frac{\boldsymbol{S}}{\mathbf{24}}$	$1{,}01\frac{S}{24}$	$1{,}01\frac{S}{24}$
25	0		

4) Так как за первые 12 мес. выплачено: 177,75 тыс. руб., то надо найти сумма выплат за 12 месяцев.

5) Так как в результате анализа сумм, записанных в первом и в последнем столбце, выявлено, что суммы долга до начисления процентов и суммы выплат – арифметические прогрессии, то используя формулу для вычисления суммы nчленов арифметической прогрессии, запишем сумму выплат за 12 месяцев.

	Сумма долга до начисления %, тыс. руб.	*Сумма долга после начисления %, тыс. руб.*	*Выплаты тыс. руб.*
1	$\boldsymbol{S}$кр	$1{,}01S$	$\mathbf{1{,}01}\boldsymbol{S}-\dfrac{\mathbf{23}\boldsymbol{S}}{\mathbf{24}}$
2	$S-\dfrac{S}{24}=\dfrac{23S}{24}$	$1{,}01\dfrac{23S}{24}$	$1{,}01\dfrac{23S}{24}-\dfrac{22S}{24}$
3	$\dfrac{23S}{24}-\dfrac{S}{24}=\dfrac{22S}{24}$	$1{,}01\dfrac{22S}{24}$	
…			
12	$\dfrac{13S}{24}$ $\div\ (\boldsymbol{a_n})$	$1{,}01\dfrac{13S}{24}$ $\div\ (\boldsymbol{b_n})$	$\mathbf{1{,}01}\dfrac{\mathbf{13}\boldsymbol{S}}{\mathbf{24}}-\dfrac{\mathbf{12}\boldsymbol{S}}{\mathbf{24}}$
13	$\dfrac{12S}{24}$	$1{,}01\dfrac{12S}{24}$	
…			
24	$\dfrac{\boldsymbol{S}}{\mathbf{24}}$	$1{,}01\dfrac{S}{24}$	$1{,}01\dfrac{S}{24}$
25	0		

Получим:

$$\begin{cases} S_{\text{выпл. за 12 мес.}} = 177{,}75 \\ S_{\text{выпл. за 12 мес.}} = \dfrac{\left(1{,}01S-\frac{23S}{24}\right)+\left(1{,}01\frac{13S}{24}-\frac{12S}{24}\right)}{2}\cdot 12 \end{cases}$$

Это и будет математическая модель. После решения системы получим 300000 рублей.

Ответ: 30000 рублей.

Пример 6. Задача с экономическим содержанием на оптимизацию.

Строительство нового завода стоит 78 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2+2x+6$

млн. рулей в год. Если продукцию завода производить по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год составит

$px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$. *Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за три года?*

1 этап. Формулирование проблемы ситуации на математическом языке.

В раках первого этапа учащиеся анализируют текст задачи и представляют текст задачи в таблице. Такой подход к проведению анализа и записи его результатов, помогает учащимся обобщить и структурировать информацию, содержащуюся в тексте задачи.

Условие	
Строительство завода	$C_{\text{стр.}} = 78$ млн. руб.
Количество единиц продукции	x (тыс. ед.)
Цена за ед. продукции	p (тыс. руб.)
Затраты на производство продукции, млн. руб. в год	$C_{\text{дет}} = 0{,}5x^2 + 2x + 6$
Прибыль фирмы за один год, млн. руб.	$P_r = px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$
Окупится	**не более чем** за 3 года
Требование: найти	p – наименьшее

2 этап. Конструирование математической модели, соответствующей проблеме реальной ситуации.

2.1. Рассуждения учащихся при поиске пути решения: выручка Bравна сумме затрат и прибыли, то прибыль равна разности между выручкой и затратами.

Учащиеся выбирают способ фиксации поиска пути решения задачи, например, $B = C_{\text{общие}} + P_r, \longrightarrow P_r = B - C_{\text{общие}}$ и $P_r \to max \longrightarrow B = xp$.

2.2. Рассуждения учащихся при составлении математической модели:

1) Т. к. затраты на строительство $C_{\text{стр.}} = 78$ млн. руб. (по условию), прибыль фирмы за один год P_r и затраты должны окупиться за три года (по условию), то $3P_r \geq 78$.

2) Т. к. $P_r = px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$(по условию) и $3P_r \geq 78$ (п. 1), то $3\big(px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)\big) \geq 78$; тогда $\boldsymbol{px - (0,5x^2 + 2x + 6) \geq 26}$.

3 этап. Исследование составленной модели с использованием математического аппарата алгебры.

Получили неравенство $px - (0{,}5x^2 + 2x + 6) \geq 26$.

В результате анализа требования и неравенства учащиеся делают вывод, что нужно найти значения параметра p, при которых неравенство имеет решение, и выбрать наименьшее положительное значение, так как p – цена за единицу товара и требуется найти наименьшее значение.

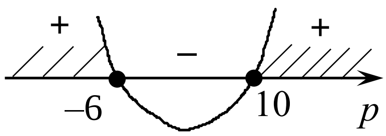
1 подход. Решение неравенства относительно pвведением функции.

После преобразования неравенства получим $x^2 + 2(2 - p)x + 64 \leq 0$.

Для нахождения p введем функцию $f(x) = x^2 + 2(2 - p)x + 64$ – квадратичная функция, парабола, ветви вверх.

$D \geq 0, p^2 - 4p - 60 \geq 0,$

$p_1 = -6, p_2 = 10$

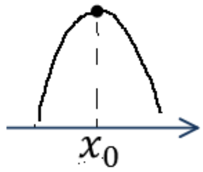


$(p + 6)(p - 10) \geq 0$ (1)

Решение неравенства (1):$p \in (-\infty; -6] \cup [10; +\infty)$.

2 подход. Используя свойства квадратичной функции, найдём количество единиц продукции x, при котором прибыль будет наибольшей.

Т. к. $P_r = px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$ и $P_r \to max$,



$P_r = -0{,}5x^2 + (p - 2)x - 6$ – квадратичная функция, график – парабола, ветви вниз, точка max находится в вершине параболы: $x_0 = \frac{-b}{a}$, $x_0 = \frac{-(p-2)}{2\bullet(-0{,}5)}$, $x_0 = \text{p} - 2$.

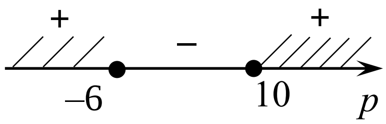
Т. к. $px - (0{,}5x^2 + 2x + 6) \geq 26$ (п.2) и $x_0 = p - 2$,

то $\begin{cases} px - (0{,}5x^2 + 2x + 6) \geq 26, \\ \qquad\qquad x = p - 2. \end{cases}$

$p(p-2) - (0{,}5(p-2)^2 + 2(p-2) + 6) \geq 26$,

$p^2 - 4p - 60 \geq 0$, (2)

$p_1 = -6$, $p_2 = 10$



Решение неравенства (2):$p \in (-\infty; -6] \cup [10;\ +\infty)$.

4 этап. Интерпретация полученных результатов.

В результате исследования модели и при первом, и при втором подходах получили, что $p \in (-\infty; -6] \cup [10; +\infty)$.

1) Так какp– цена, $p > 0$ и p – наименьшее (по требованию), то $p_{\text{наименьшее}} = 10$.

2) *Проверка*:

а) т. к. x – количество единиц продукции, то $x > 0$;

б) т. к. при $p_{\text{наименьшее}} = 10$, $x = p - 2 = 8{,}8 > 0$,

то 10 тыс. руб.– наименьшая цена за изделие.

Ответ: 10 тыс. руб.

Отметим, что в задачах, аналогичных рассмотренной надо делать проверку, чтобы убедиться, что найденное значение переменной удовлетворяет всем условиям задачи.

Подведем итоги. В практике обучения математике при традиционном подходе к составлению модели под моделью подразумевается уравнение или неравенство, их совокупность или система. В примерах 2–6 рассматривается понятие «математическая модель» в более широком смысле. На каждом этапе решения задачи учитель может организовать деятельность учащихся по математическому моделированию реальной ситуации. Пример 3 раскрывает возможность применения геометрии для создания модели при решении текстовых задач в алгебре, что подчеркивает единство учебных курсов предмета. Такой подход к формированию умений математического моделирования будет способствовать формированию планируемых результатов обучения математике более высокого уровня.

2.2. Формирование умения решать геометрические задачи на углублённом уровне изучения математики

2.2.1. Направления формирования у обучающихся умения решения геометрических задач

На углублённом уровне курс представлен содержательными линиями: «Начала геометрии», «Треугольники», «Окружность», «Четырехугольники», «Подобие», «Элементы тригонометрии», «Площади», а также «Метод координат», «Векторы», «Преобразования плоскости». Изучение курса геометрии на углублённом уровне основано на расширении и углублении содержания в направлении теоретического материала и практической деятельности. В теоретический компонент, например, включена учебная информация о теоремах, в которой представлены: структура теорем, виды теорем и методы их доказательства, через сравнение и анализ теорем, которые учащиеся изучили в предыдущих темах. Практический компонент – система задач, которые учитель использует для организации активной учебно-познавательной деятельности учащихся.

Геометрические задачи являются одним из важных средств обучения в направлении достижения планируемых результатов обучения математике. Задачи входят во все темы курса геометрии в 7–9 классах. Отметим, что геометрические задачи входят во вторую часть КИМов ОГЭ и ЕГЭ профильного уровня и относятся к задачам повышенного уровня сложности. Геометрические задачи высокого уровня сложности включены в тематическое содержание одного из направлений олимпиад по математике всех уровней. Это акцентирует важность геометрической составляющей учебного предмета «Математика».

Геометрические задачи классифицируют, например, в зависимости от требования: на вычисление неизвестных геометрических величин; доказательство математических отношений; построение геометрических фигур. Значительная часть задач – это задачи на вычисление и доказательство. Умение решать геометрические задачи многокомпонентная сложная система, в состав которой входят математические знания и специальные умения, опыт их применения, включающий мыслительные умения научного познания (см. табл. 2, рис. 2).

В процессе решения математической задачи выделяют ***четыре основных этапа***: осмысление текста задачи, составление плана решения, осуществление плана решения, интерпретация полученных результатов. На каждом этапе решения задач выполняются определённые действия, уровень сформированности которых связан с успешностью решения задачи. Основные затруднения у учащихся возникают на *первых двух этапах*, так как школьники часто ищут известный способ решения; идут по пути применения теоретических знаний к фактам задачи, которые представлены в явном виде, лежат на поверхности; работают над одним путём решения задачи, над идеей, которая появилась первой. Часто учащиеся не найдя путь решения задачи перестают с ней работать, отказываются от её решения. Осуществление плана решения на *третьем этапе* связано с логической культурой мышления. Основные затруднения связаны с недостаточной сформированностью умения корректно записать цепочку логических утверждений, пренебрежением обоснования выводов. На *четвертом этапе* решения задачи возникает проблема соотнесения полученных результатов с условием и требованием задачи.

Таким образом, обучение школьников решать геометрические задачи является необходимым условием формирования умений решения геометрических задач на углублённом уровне изучения математики. Выделенные поэтапные затруднения учащихся характеризуют направления формирования у обучающихся умения решения геометрических задач.

2.2.2. Рекомендации к организации обучения решению геометрических задач

Начиная с изучения систематического курса геометрии в 7 классе учителю необходимо организовывать деятельность учащихся в направлении формирования умения осознанного прочтения геометрического текста и перевода текста задачи в символьную форму и на язык чертежа. Такое прочтение способствуют лучшему пониманию отношений между фигурами, которые в явном виде описаны в задаче. На этом этапе обучения решению задач нельзя пренебрегать организацией процесса в направлении анализа текста, поиска пути решения задачи и фиксацией гипотез. В умении найти путь вычисления или доказательства проявляется логическая и геометрическая культура мышления. Рассмотрим примеры, акцентируя внимание на важных моментах формирования у обучающихся действий, входящих в состав умения решения задач.

На начальном этапе формирования у учащихся умения решать задачи необходимо сформировать умения осознанного прочтения текста, выявления основной фигуры, её элементов и математических отношений в процессе анализа текста. Деятельность учащихся в этом направлении учитель может организовать на основе теоретического материала темы после изучения какого-либо понятия или всей темы. Учитель, например, предлагает задания по выявлению верных утверждений, сравнения фигур и выявления у них общих существенных признаков. Утверждения составлены на основе определений понятий и их свойств (пример 7). Утверждения могут сопровождаться рисунками и тогда учащиеся должны выявить верные утверждения, описывающие отношения между геометрическими объектами. Кроме этого, особо надо обратить внимание на изучение, анализ текста задачи. В процессе этой работы учитель рекомендует учащимся начинать изучение задачи с выполнения наглядных рисунков, схем, чертежей, информационных таблиц, помогающих осознанию и пониманию задачи.

Пример 7. Геометрия, 7 класс.

Укажите номера верных утверждений

1	Два угла называются смежными, если стороны одного угла продолжают стороны другого угла.
2	Сумма смежных углов равна 180^0.
3	Четыре угла называются вертикальным, если стороны одного угла продолжают стороны другого угла.
4	Биссектрисой треугольника называется луч, делящий угол на два равных угла.
5	Из точки, не лежащей на прямой, можно провести бесконечно много перпендикуляров к этой прямой.

Необходимо сформировать у учащихся: умения выполнения не только аккуратного рисунка или чертежа, а, в первую очередь, геометрически грамотного чертежа; понимание роли символических обозначений на чертеже; отслеживания присутствия частных случаев и понимания возможности получения ложных выводов в случае замены общего случая частным, например, произвольного треугольника равносторонним.

Например, если трапецию общего вида в примере 11 заменить (изобразить) равнобедренной, то можно сделать неверный вывод, что площади треугольников ABE и CDE равны, так как эти треугольники равны.

Пример 8. Геометрия, 9 класс.

Диагонали трапеции $ABCD$с большим основаниемAD пересекаются в точке E. Доказать, что площади треугольников ABE и CDE равны.

Дано:

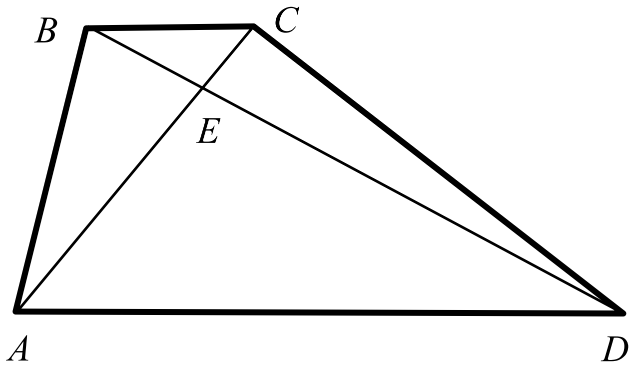
$ABCD$ – трапеция,

AD – большее основание;

AC и BD – диагонали,

$AC \cap BD = E$.

Найти: $S_{\Delta ABE} = S_{\Delta CDE}$.



В рамках анализа текста задачи и составления плана её решения целесообразно сформировать у учащихся действия поиска решения задачи и составления схемы поиска, которые в процессе развития перейдут в умения. Сформированность этих умений на высоком уровне особенно важно в решении задач повышенного уровня сложности и нестандартных задач.

При *проведении анализ текста* задачи учащиеся:

1) выделяют условие и требование задачи;

2) конкретизируют условие – называют, о каких объектах идёт речь, какая фигура является главной, какие величины и математические отношения известны;

3) конкретизируют требование: называют, о каких объектах идёт речь в требовании, что необходимо установить об этих объектах;

4) переводят условие и требование задачи из одной форму в другую, в частности, из словесной формы в символьную и записывают «Дано», «Доказать» или «Найти» или «Построить»;

5) выполняют изображение (рисунок, чертеж) объекта, схему отношений между геометрическими объектами (пример 9).

Пример 9. Геометрия, 9 класс.

Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F. Найдите AB, если $AF = 24$, $BF = 32$.

Дано:

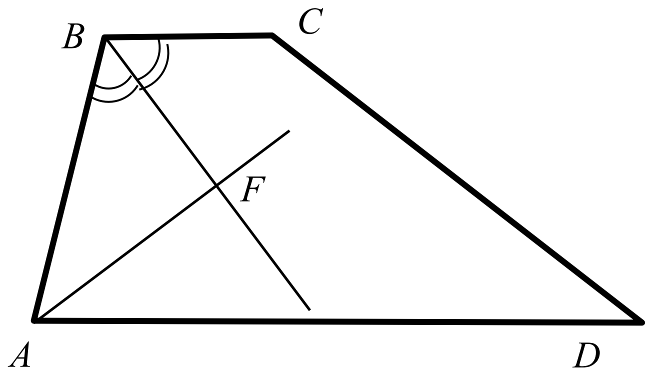
$ABCD$ – трапеция,

AB – боковая сторона;

AF и BF – биссектрисы,

$AF = 24$, $BF = 32$.

Найти: AB.



В процессе *поиска пути решения задачи* учащиеся:

1) выводят следствия из условия и/или требования;

2) фиксируют процесс поиска, указывая направление рассуждений;

3) отмечают известные теоретические факты или величины;

4) уточняют, конкретизируют последовательность выполненных рассуждений;

5) выбирают путь решения и составляют план решения задачи.

Результатом этой работы является схема поиска решения задачи и план решения задачи (рис. 9).

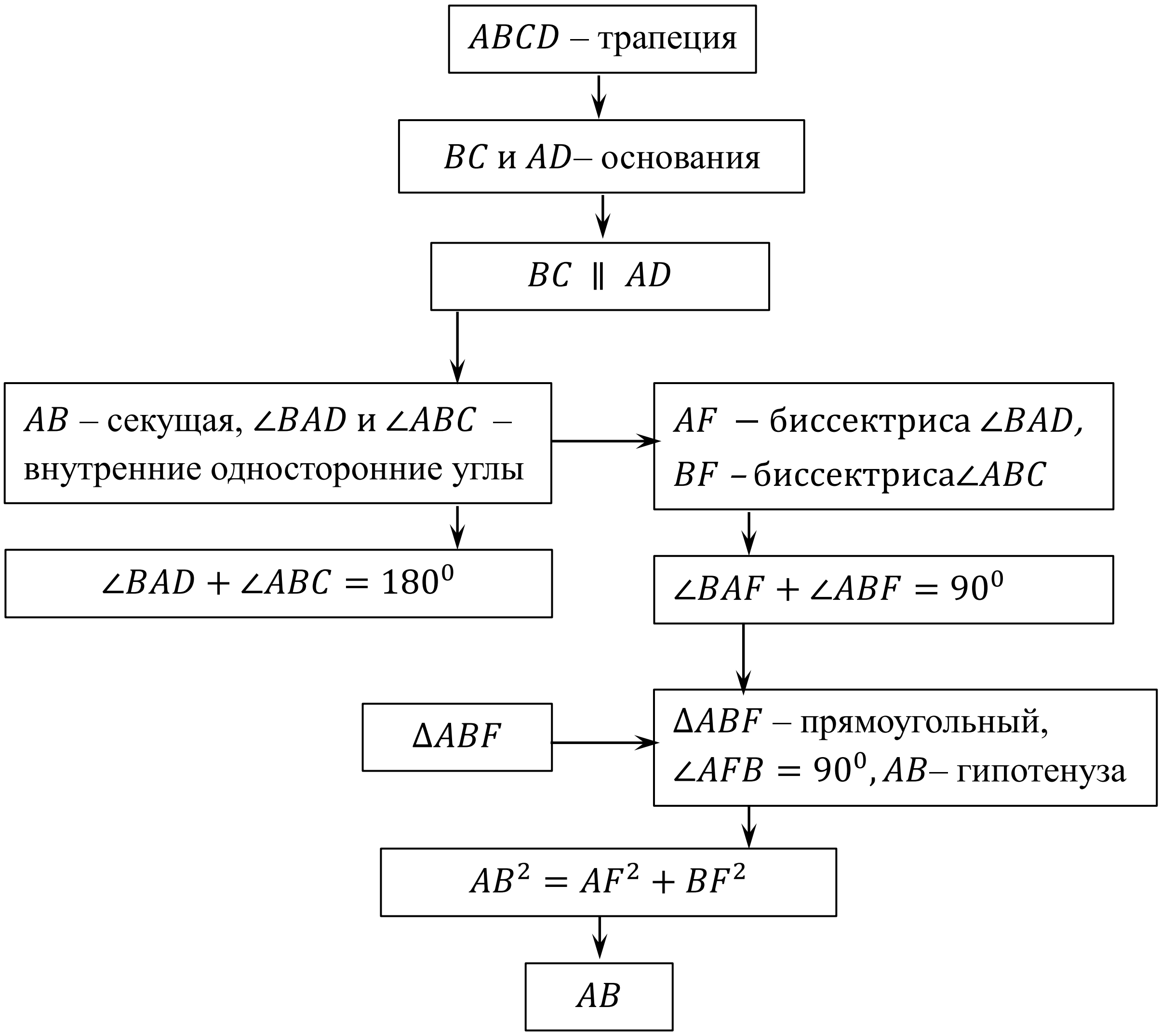


Рис. 9. *Схема поиска и план решения задачи*

Отметим, что для успешного осуществления поиска пути решения задачи полезно помнить некоторые факты (сведения) о математических отношениях между геометрическими фигурами, которые помогают в нахождении пути решения. Например, что диаметр окружности, проходящий через середину хорды перпендикулярен ей, медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, делит этот треугольник на два равнобедренных треугольника и др. Часто эти факты при изучении геометрии являются результатом решения другой геометрической задачи. Поэтому учителю необходимо обращать внимание учащихся на эти факты и создать вместе с учащимися своеобразную библиотеку (каталог) фактов, которые надо помнить. Приведём пример.

Пример 10. Геометрия 9 класс.

Дан остроугольный треугольник ABC. Биссектриса внутреннего угла при вершине B пересекает биссектрису внешнего угла при вершине C в точке M, а биссектриса внутреннего угла при вершине C пересекает биссектрису внешнего угла при вершине B в точке N.

А) Докажите, что $2\angle BMN = \angle ACB$.

Б) Найдите BM, если $AB = AC = 5,\ BC = 6$.

Рассуждения учащихся при поиске пути доказательства.

1) Так как BM и BN,CN и CM – биссектрисы внутреннего и внешнего угла при вершине B и C треугольника ABC (по условию), то$BM \perp BN$ и $CN \perp CM$, тогда$\angle MBN$и$\angle MCN$ – прямые, значит ΔMBN и ΔMCN – прямоугольные (по определению), MN – общая гипотенуза (рис. 10, а).

2) Так как ΔMBN и ΔMCN – прямоугольные треугольники, MN – общая гипотенуза (п. 1) и вокруг любого треугольника можно описать окружность, то эти треугольники будут вписаны в одну окружность, MN – диаметр, центр окружности – середина гипотенузы (рис. 10, б).

3) Так как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу равны, то $\angle BCN = \angle BMN,\ \angle BNC = \angle BMC,\ \angle CBM = \angle CNM$ (рис. 10, в).

4) Так как BM иCN – биссектрисы (по условию), то $\angle CBM = \frac{\angle B}{2}$, $\angle BCN = \frac{\angle C}{2}$ (по определению биссектрисы) (рис. 10, г).

5) Так как $\angle BMN = \frac{\angle C}{2}$ (п. 3 и 4), $\angle ACB = 2\angle BCN$, то $2\angle BMN = \angle ACB$, что и требовалось доказать.

А) Первая часть задачи

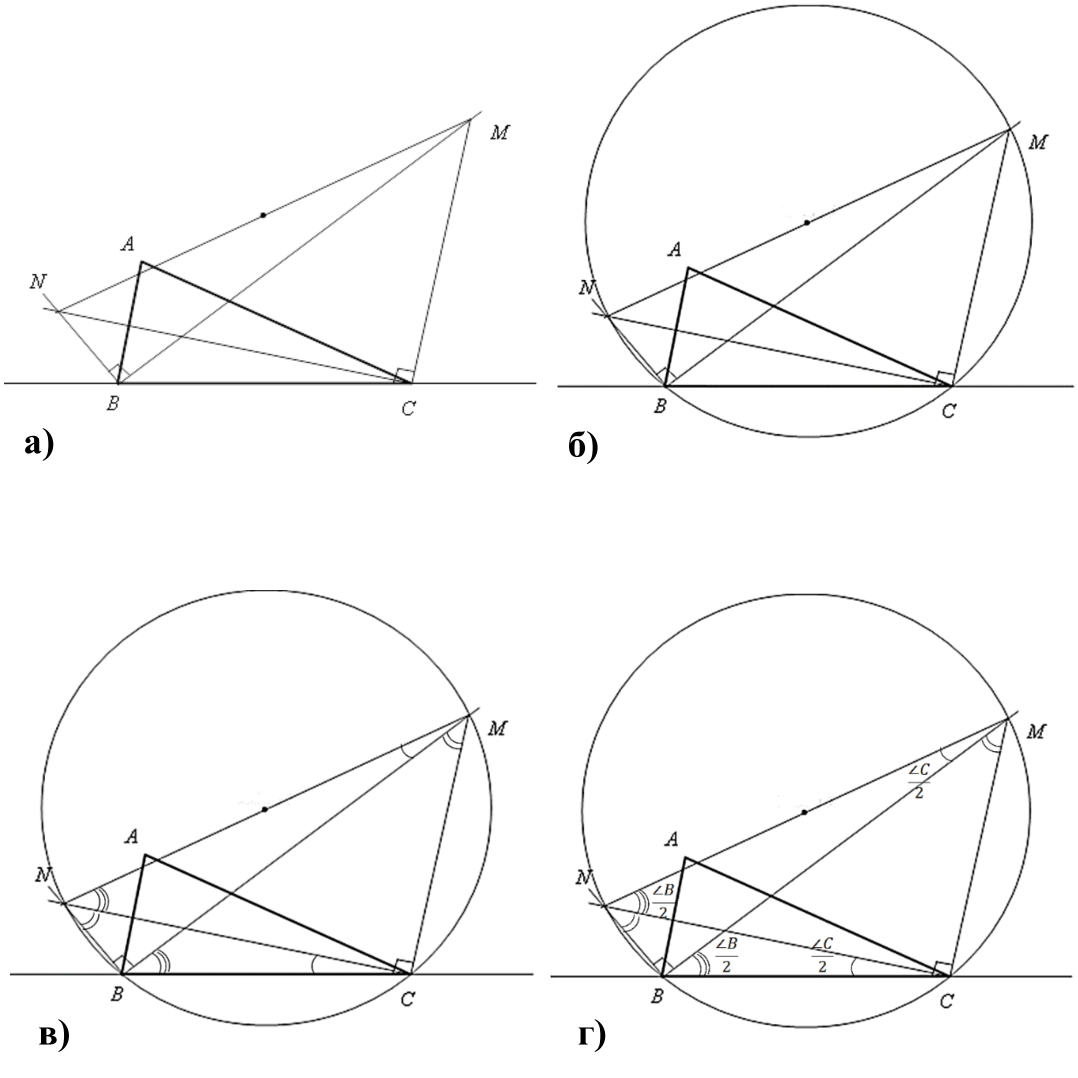


Рис. 10. *Схема поиска и план решения задачи,*

Учитель акцентирует внимание учащихся на том, что в процессе поиска пути доказательства понадобились знания фактов: биссектрисы смежных углов перпендикулярны; гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром описанной вокруг него окружности, центр которой – середина гипотенузы; вписанные углы, опирающиеся на одну дугу равны.

Учитель обращает внимание учащихся на то, что в первой части задачи было указано, что треугольник ABC остроугольный, т. е. не рассматривался частный вид треугольника, а значит доказанное отшение углов при такой конфигурации будет выполняться для всех остроугольных треугольников.

Далее учащиеся отвечают на вопрос «Соответствует ли чертеж выполненный в части А) задачи части Б?». Учащиеся интерпретируют доказанные отношения и анализируют данные оΔABCв части Б). Отмечают, что во второй части конкретизируется вид ΔABC: $AB = AC = 5$, $BC = 6$, т. е. ΔABC – равнобедренный, BC – основание. Поэтому требуется корректировка чертежа.Обозначим для удобства величины углов α, β, γ. На основе рассуждений при поиске пути решения учащиеся выполняют чертеж ко второй части задачи (рис. 11).

Б) Вторая часть задачи

Найдите BM,
если $AB = AC = 5$,
$BC = 6$.

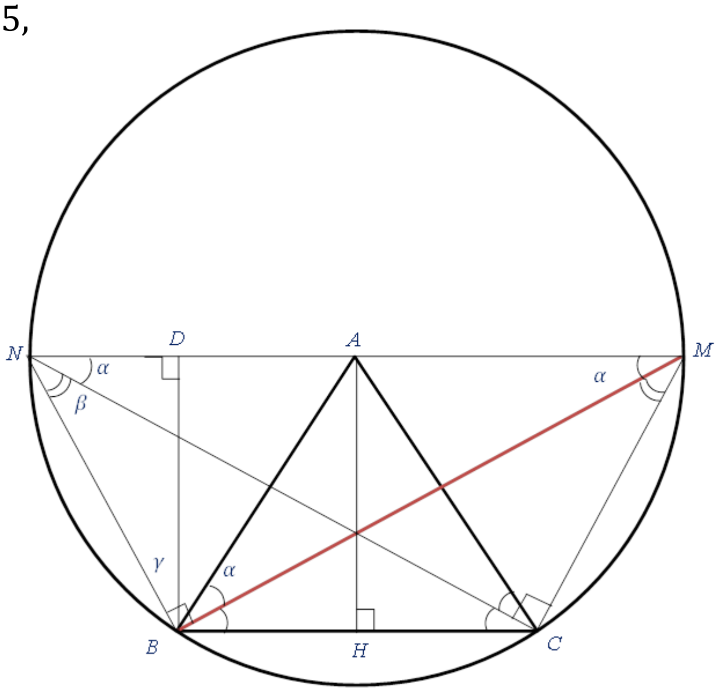


Рис. 11. *Чертеж ко второй части примера*

Представим коротко рассуждения учащихся.

1) Рассмотрим ΔABN. Так как $\angle ABN=\angle\gamma=\angle\alpha+\angle\beta$, $\angle ANB=\angle\alpha+\angle\beta$, то ΔABN – равнобедренный, $AB=AN$.

2) ΔABN – равнобедренный, $AB = AN = 5; \Delta MAC$ – равнобедренный,$AC = AM = 5;$ то $MN = 10$.

3) Так как $BD = AH = 4; ND = 2$, то $BN = 2\sqrt{5}$.

4) Рассмотрим прямоугольный ΔBMN: $BM = \sqrt{MN^2 - BN^2}= 4\sqrt{5}$.

Задачи аналогичные рассмотренной способствуют формированию умения актуализации и систематизации знаний, развитию нешаблонного мышления, умению применения знаний в нестандартной ситуации. Используя описанный подход к организации обучения геометрии и такие задачи учитель реализует формирование у обучающихся умений решения геометрических задач на углублённом уровне.

2.2.3. Содержательная линия «Геометрические построения» в 7–9 классах

Обучение решению задач на построение является важной неотъемлемой составляющей учебного курса «Геометрия» на углублённом уровне изучения. Геометрические задачи на построение повышенного и высокого уровня сложности часто решаются при помощи простейших (элементарных) геометрических задач на построение, которые рассматриваются в курсе геометрии 7–9-х классов. Поэтому важно, чтобы у учащихся умения решения элементарных геометрических задач на построения были сформированы на достаточно высоком уровне.

К элементарным задачам на построение, например, относятся построения:

1) отрезка на прямой, равного данному отрезку;

2) угла, равного данному углу;

3) биссектрисы угла;

4) середины отрезка;

5) прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярную данной прямой;

6) прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой;

7) треугольника по двум сторонам и углу между ними;

8) треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам;

9) треугольника по трём сторонам;

10) касательной к окружности, проходящей через данную точку.

Традиционное распределение содержательной линии «Геометрические построения» в 7–9 классах на примере УМК Л. С. Атанасяна и др. представлено в табл. 19. Соотнесение методов решения задач на построение с теоретическим материалом основного курса геометрии позволяет выявить последовательность раскрытия этих методов в обучении предмету.

Таблица 19

Распределение содержательной линии «Геометрические построения» по классам на уровне основного общего образования

Класс / тема школьного курса геометрии / методы решения задач на построение		*Задачи на построение, полное решение которых представлено в учебнике [Геометрия. 7–9 классы. Л. С. Атанасян и др.]*
7	Начальные геометрические сведения. Построение с помощью чертежного треугольника. Геометрическое место точек (ГМТ)	Построение перпендикуляра к прямой
7	Треугольники. Построение циркулем и линейкой (ЦЛ): а) ГМТ; б) алгебраический метод (элементарные задачи)	Элементарные задачи на построение

7	Параллельные прямые. Построение с помощью чертежного треугольника и линейки (ТЛ). ГМТ	Построение параллельных прямых
7	Соотношения между сторонами и углами треугольника. Построение с помощью чертежного треугольника и линейки (ТЛ): а) ГМТ; б) алгебраический метод Этапы решения задач на построение	Построение треугольника по трем элементам: по двум сторонам и углу между ними; по трем сторонам; по стороне, прилежащему к ней углу и высоте, проведенной к этой стороне; по стороне, медиане, проведенной к одной из двух сторон, и углу между данными стороной и медианой; по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из этих сторон; по двум сторонам и высоте к третьей стороне
8	Четырехугольники. Построение с помощью циркуля и линейки: а) ГМТ; б) алгебраический метод	Построение четырехугольников: *параллелограмма* по двум смежным сторонам и соединяющей их концы диагонали; *прямоугольника*: а) по двум смежным сторонам; б) по стороне и диагонали; в) по диагонали и углу между диагоналями; *ромба*: а) по двум диагоналям; б) по стороне и углу; *квадрата*: а) по стороне; б) по диагонали
8	Практическое применение подобия треугольников. Построение с помощью циркуля и линейки. Метод подобия геометрических фигур	Построение треугольника: по данным двум углам и биссектрисе при вершине третьего угла; по углу и медиане, проведенной из вершины этого угла, и отношению сторон треугольника, являющихся

		сторонами этого угла. Деление отрезка на части в заданном отношении
8	Окружность. Построение с помощью циркуля и линейки: а) ГМТ; б) построение окружностей	Построение хорды окружности с заданным углом между хордой и радиусом окружности. Построение касательной к окружности. Построение серединного перпендикуляра к отрезку. Построение окружности вписанной в треугольник. Построение окружности описанной около треугольника. Построение окружности, проходящей через точку, принадлежащую прямой и касающуюся этой прямой в заданной точке.
9	Правильные многоугольники Построение с помощью циркуля и линейки: а) ГМТ; б) построение окружностей	Построение правильных многоугольников: шестиугольника; правильный 2^k-угольник, где $k > 2$. Построение вписанного в окружность правильного: а) шестиугольника; б) треугольника; в) квадрата; г) восьмиугольника.
9	Движение. Метод поворота, симметрии	Построение отрезка с помощью параллельного переноса. Построение методом поворота отрезка, окружности, прямой

2.2.4. Расширение задач на построение алгебраической составляющей

Формирование умений решения геометрических задач на построение в соответствии с теорией формирования умственных действий П. Я. Гальперина должно осуществляться поэтапно. Базируясь на последовательности раскрытия методов построения при решении простейших задач на построение (табл. 7) можно выделить этапы и выявить основные формируемые действия на нём и задачи, которые используем для организации деятельности учащихся, а также задачи, которые расширят и углубят содержательную линию геометрических построений.

На первом этапе обучения составлению и решению задач на построение при рассмотрении элементарных задач целесообразно организовать деятельность учащихся на «открытие» соответствующих предписаний, составление предписаний, например, построение отрезка, равного данному отрезку (пример 11).

Пример 11. Построение на прямой отрезка, равного данному отрезку.

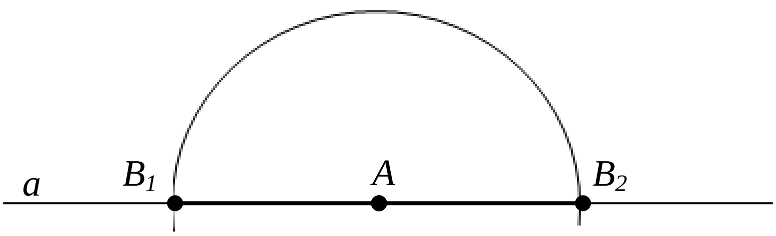


Рис. 12. *Иллюстрация к примеру 11*

Построение	
Действия построения	*Результат построения*
1) отроим прямую a;	1) прямая a;
2) отмечаем на прямой a точку A;	2) A, $A \in a$;
3) строим полуокружность (A; AB)	3) полуокружность (A; AB) ∩ прямую $a = B_1$; полуокружность (A; AB) ∩ прямую $a = B_2$
Получили: $\boldsymbol{AB_1} = AB$, ($\boldsymbol{AB_2} = AB$), что и требовалось построить	

На следующем этапе учебный материал можно расширить «открытием» учащимися алгебраического метода для решения задач на построение. Учитель организует построение отрезка XY, длина которого x выражена математическими выражениями (формулами): $a+b$, $a-b$, $\frac{ab}{c}$, $\sqrt{a \bullet b}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$ и др. (отрезки a, b, c, и др. заданы), с помощью проведения прямых и окружностей (основных операций построения).

Введение построения конкретного математического выражения происходит при изучении соответствующего материала основного курса геометрии. Например, составление предписания для построения выражения $\frac{a}{m}$, где m – натуральное число, учитель организует при изучении теоремы Фалеса (8-й класс), выражений $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$ – при изучении теоремы Пифагора (8-й класс); $a = c\sin\beta$, $b = c\cos\beta$ – соотношения между сторонами и углами треугольника (9-й класс) (примеры 12–15).

Пример 12. Построение выражения $\frac{n}{m}a$, где n, m – натуральные числа.

При построении отрезка XY, длина которого в m раз меньше длины данного отрезка, обоснованного теоремой Фалеса (рис. 13), используются: 1) построение выражения nb; 2) построение параллельной прямой, проходящей через данную точку (элементарная задача).

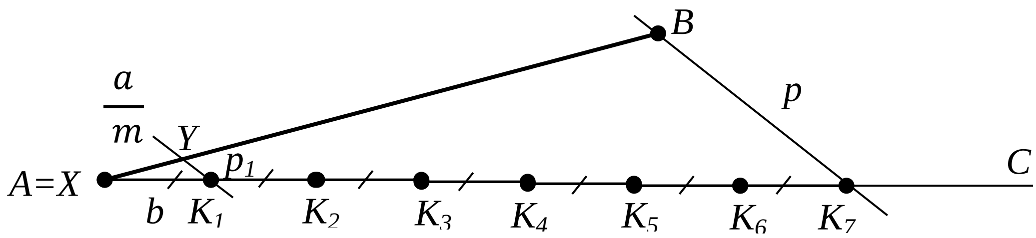


Рис. 13. *Иллюстрация к примеру 12*

Построение	
Действия построения	*Результат построения*
1) Строим луч, выходящий из одного конца данного отрезка	1) Луч AC
2) Откладываем последовательно на луче n раз произвольный отрезок b, $n= m$	2) n равных отрезков на луче AC, $n= 7$. $AK_1 = K_1K_2 = K_2K_3 = K_3K_4 = K_4K_5 = K_5K_6 = K_6K_7$
3) Проводим прямую через конец последнего отрезка на прямой и второй конец данного отрезка	3) Прямая p; $B \in p$, $K_7 \in p$
4) Через конец первого отрезка, лежащего на прямой, проводим прямую, параллельную прямой, проведенную в п. 3	4) Прямая p_1, $p_1 \| p$, $K_1 \in p_1$; $p_1 \cap AB = Y$
Так как получили: ***XY***, $XY=\frac{AB}{7}$, то $x= \frac{a}{m}$, что и требовалось построить.	

Пример 13. Построение математических выражений: $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$.

Для построения отрезка XY, длина которого в процессе анализа представлена выражениями $\sqrt{a^2+b^2}$ или $\sqrt{a^2-b^2}$ $(a > b)$, используем отношение между гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника (рис. 14).

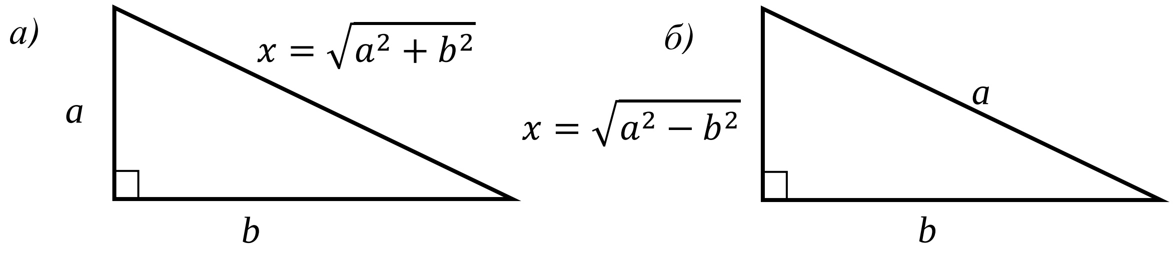


Рис. 14. *Иллюстрация к примеру 13*

Тогда:

– если длина отрезка равна $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, то XY – гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и b (рис. 14, а);

– если длина равна $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ (a>b), то XY – катет прямоугольного треугольника с гипотенузой a и катетом b (рис. 14, б).

Пример 14. Построение отрезка XY, если известны отрезок a и β – острый угол. Если длина отрезка XY выражается через тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника:
$a = csin\beta$, $b = ccos\beta$, то искомый отрезок является одним из катетов прямоугольного треугольника (рис. 15).

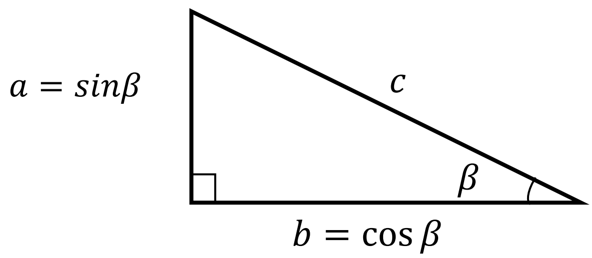


Рис. 15. *Иллюстрация к примеру*

Пример 15. Построение отрезка XY, если известны отрезок c и β – острый угол. Если длина искомого отрезка в процессе анализа задачи представлена выражениями $a = csin^3\beta$ или $b = ccos^3\beta$, то искомый отрезок является частью катетов прямоугольного треугольника с гипотенузой с и острым углом β.

Построение:

1) ΔABC: $\angle BAC = 90^0$, $\angle BCA = \beta$, гипотенуза $BC = c$,
катеты $AB = csin\beta$,$AC = ccos\beta$;

2) ΔABF: $\angle BFA = 90^0$, $\angle BAF = \beta$, гипотенуза $AB = csin\beta$(п. 1);
катеты $BF = csin^2\beta$, $AF = csin\beta cos\beta$;

3) ΔDBF: $\angle BDF = 90^0$, $\angle BFD = \beta$, гипотенуза $BF = csin^2\beta$(п. 2); катеты $\boldsymbol{BD = csin^3\beta}$, $DF = csin^2\beta cos\beta$;

4) ΔAFC: $\angle AFC = 90^0$, $\angle FCA = \beta$, гипотенуза $AC = ccos\beta$ (п. 1); катеты $AF = csin\beta cos\beta$ (п. 2), $FC = ccos^2\beta$;

5) ΔEFC: $\angle FEC = 90^0$, $\angle FCE = \beta$, гипотенуза $FC = ccos^2\beta$ (п. 4); катеты $\boldsymbol{EC = ccos^3\beta}$, $EF = csin\beta cos^2\beta$.

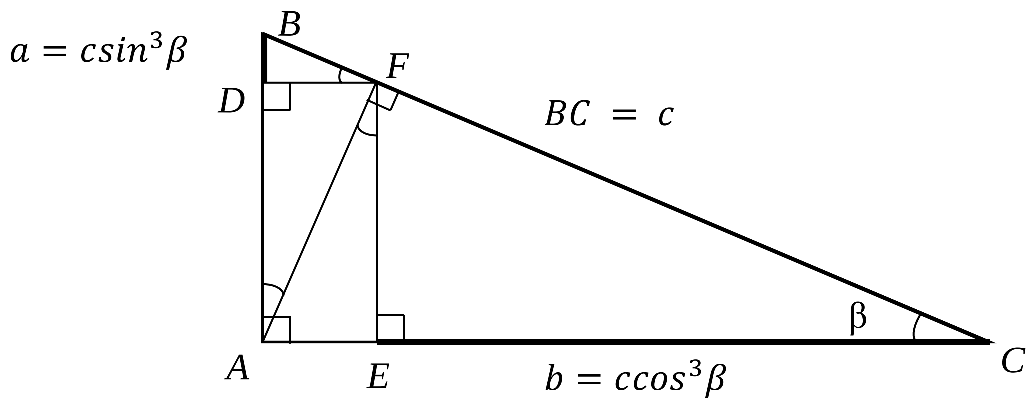


Рис. 16. *Иллюстрация к примеру 15*

Отрезки $a = csin^3\beta$ или $b = ccos^3\beta$ построены с использованием построения прямоугольного треугольника по гипотенузе и острому углу (элементарная задача) и высоты этого треугольника.

После решения этой задачи учителем целесообразно организовать анализ построения выражений $a = csin^3\beta$ или $b = ccos^3\beta$ и выявление учащимися возможности построения отрезков, длины которых представлены выражениями, содержащими тригонометрические функции: $csin^n\beta$ или $ccos^n\beta$, при помощи выполнения аналогичных построений.

Анализ задач на построение, представленных в УМК, по которому работает учитель, позволяет ему в процессе обучения решению задач на построение расширить основной курс геометрии дополнительным материалом. Например, рассмотреть теорему о возможности построения фигуры с помощью циркуля и линейки, выявить разрешимые и неразрешимые задачи на построение треугольника с помощью циркуля и линейки; включить задачи: об удвоении куба, о трисекции угла, о квадратуре круга; показать построение правильного пятиугольника и т.д.; предложить учащимся самим составить задачи на построение треугольника и решить те из них, условие которых содержит набор элементов искомого треугольника, отличный от набора рассматриваемых в учебнике.

Например, школьниками 9-го класса, обучающимися на углублённом уровне, по требованию «построить треугольник» составлена задача: построить треугольник по радиусам вписанной и вневписанной окружностей и периметру. Покажем поэтапное решение этой задачи.

Пример 16.

Условие (дано): r – радиус вписанной окружности, r_a – радиус вневписанной окружности, $2p$ – периметр треугольника (p – полупериметр).

Требование: построить треугольник, используя указанные элементы.

Анализ задачи. Пусть ΔABC построен. В ΔABC вписана окружность (O; r) и вневписана окружность (O_a; r_a).

Рассуждения учащихся:

1) окружности (O;r) и (O_a; r_a) вписаны в $\angle CAB$, M, N и N_a, M_a – точки касания соответствующих окружностей со сторонами углов;

2) AM_a – расстояние от вершины угла до точки касания вневписанной окружности равно периметру треугольника;

3) при построении касательной к окружности (O_a; r_a) (элементарное построение) получим местоположение точки A;

4) построим $\angle M_aAN_a=2\angle M_aAO_a$, т. к. AO_a – биссектриса; AN_a – касательная к окружности (O_a; r_a); сторона AB искомого треугольника ABCпринадлежит AN_a;

5) построим окружность (O;r) – вписанную в $\angle M_aAN_a$;

6) построим CB – касательная к окружностям $(O;r)$ и $(O_a;\ r_a)$ или сторона искомого треугольника.

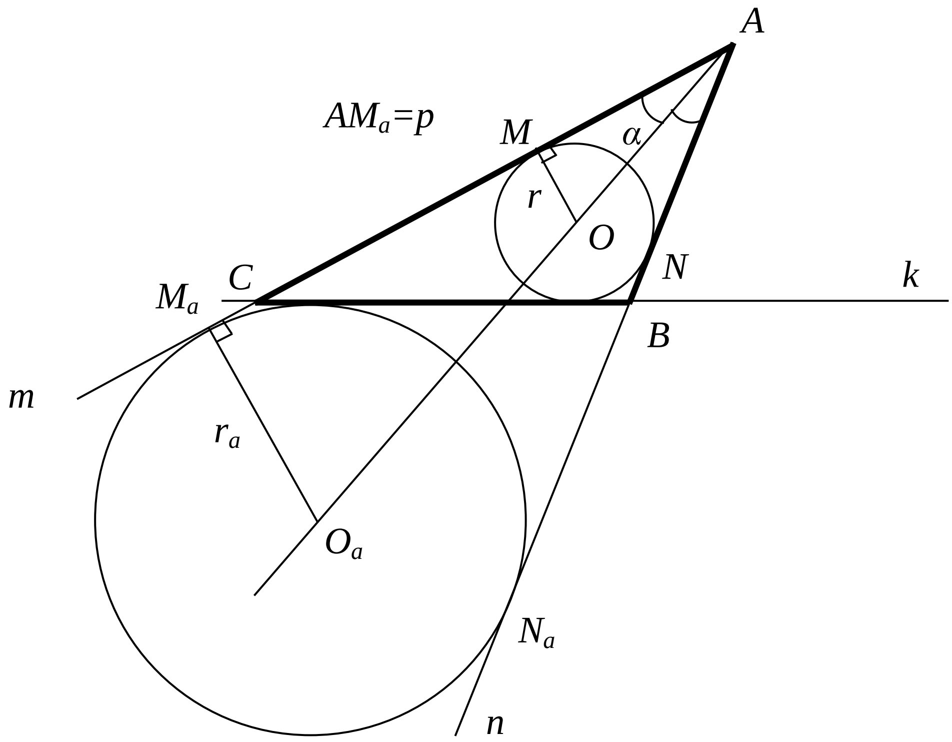


Рис. 17. *Анализ построения искомого треугольника*

Результат: отыскание действий построения искомого треугольника на основе установленных связей между элементами искомого треугольника и данными задачи.

Исследование существования решения задачи и его единственности

Построение возможно, если $OO_a \geq r + r_a$,

1) так как ΔAO_aM_a – прямоугольный, AO_a – гипотенуза,

то $AO_a = \sqrt{r_a^2 + p^2}$(теорема Пифагора);

2) так как ΔAOM и ΔAO_aM_a подобны (признак подобия прямоугольных треугольников), то $AO = AO_a \bullet \frac{r}{r_a} = \sqrt{r_a^2 + p^2} \bullet \frac{r}{r_a}$;

3) так как $AO_a = OO_a + AO$ (свойство отрезка), то

$$OO_a = AO_a - AO = \sqrt{r_a^2 + p^2}\left(1 - \frac{r}{r_a}\right) = \sqrt{r_a^2 + p^2} \bullet \frac{r_a - r}{r_a}$$

Тогда: $\begin{cases} r_a > r \\ p > \frac{2r_a\sqrt{rr_a}}{r_a - r}. \end{cases}$

Затем учащиеся задают радиусы вписанной и вневписанной окружностей, периметр треугольника, удовлетворяющие этим условиям, и выполняют построение.

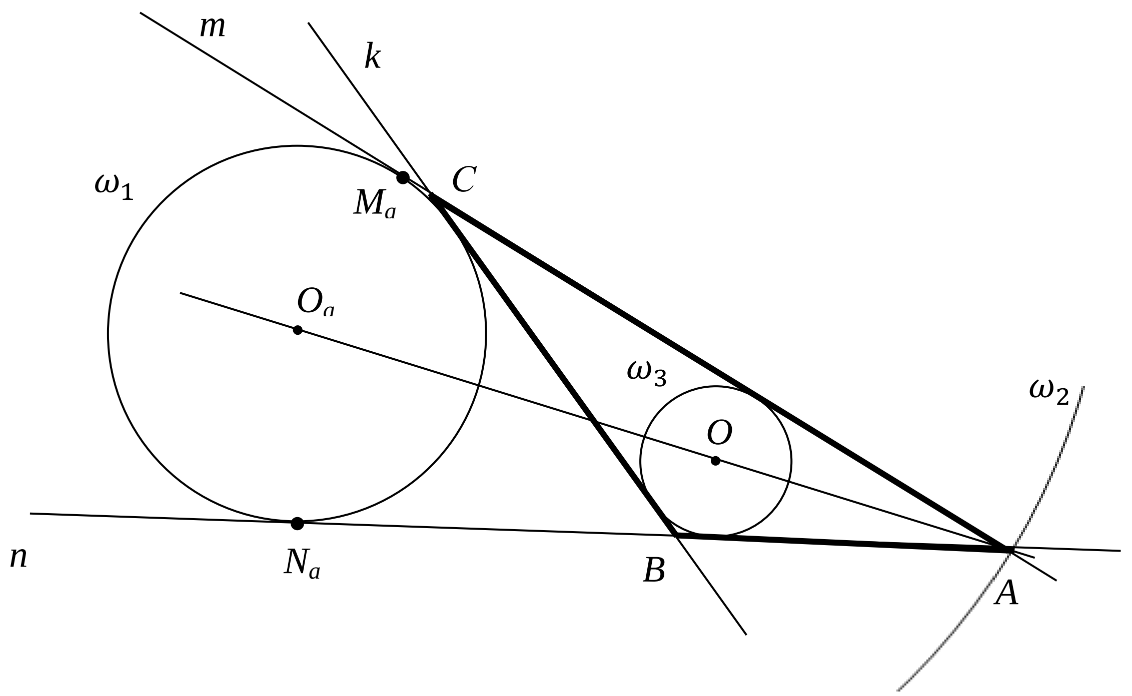


Рис. 18. *Построение треугольника по радиусам вписанной и вневписанной окружностей и периметру*

Построение треугольника по радиусам вписанной и вневписанной окружностей и периметру

Действия построения	*Результат построения*
1) Строим окружность $\omega_1(O_a; r_a)$	1) Окружность $\omega_1(O_a; r_a)$
2) Строим m – касательная к окружности $\omega_1(O_a; r_a)$	2) M_a – точка касания
3) Строим окружность $\omega_2(M_a; p)$	3) $\omega_2(M_a; p) \cap m = A$, A – вершина искомого треугольника
4) Строим n – касательная к окружности $\omega_1(O_a; r_a)$	4) N_a – точка касания, $N_a \neq M_a$

5) Строим окружность $\omega_3(O; r)$	5) $\omega_3(O; r)$ – вписанная в $\angle M_aAN_a$
6) Строим k – общая касательная к окружностям $\omega_1(O_a; r_a)$ и $\omega_3(O; r)$	6) $k\cap m= C$, $k\cap n= B$; B и C – вершины искомого треугольника
Так как A, B, C– вершины искомого треугольника, тоΔABC– искомый, что и требовалось построить	

При решении задачи на построение примера 16 использовались умения выполнения элементарных построений: построение окружности, касательной к окружности, окружности, вписанной в треугольник. В процессе решения задачи учащиеся выдвигали гипотезу о возможности построения треугольника по указанным элементам, подтверждали её при проведении исследования существования решения задачи и его единственности.

Подведём итоги. Изучение учебного курса «Геометрия» учебного предмета «Математика» на углублённом уровне ориентировано на расширение и углубление теоретической и практической составляющих содержания курса. Геометрические задачи являются основным средством обучения геометрии. Задачи повышенного и высокого уровня сложности входят во вторую часть КИМов ОГЭ и ЕГЭ, задачи высокого и олимпиадного уровня сложности включены в геометрическую составляющую олимпиад всех уровней. Это подчеркивает значимость обучения решению геометрических задач. В процессе решения геометрических задач выполняется большая умственная деятельность, базирующаяся на методах научного познания, на применении познавательных универсальных учебных действий. Поэтому при изучении геометрии требуется специально организованная учебная деятельность в направлении формирования и развития умений решения геометрических задач.

Использование описанных подходов к организации обучения геометрии на углублённом уровне, задач аналогичных рассмотренным будет способствовать формированию и развитию умений решения геометрических задач на более высоком уровне.

2.3. Лабораторные работы по учебному предмету «Математика»

2.3.1. Общие рекомендации по проведению лабораторных работ по математике

Традиционно лабораторные работы широко используются в обучении школьным предметам естественнонаучного цикла, например, физики и химии, но в организации школьного математического образовательного процесса этот вид деятельности учащихся приобретает особый акцент в свете обновления содержания математики и достижения планируемых результатов обучения. Поэтому в обучение разным курсам учебного предмета «Математика» на уровне основного и среднего общего образования целесообразно включить лабораторные работы, разработанные под руководством ФГБНУ «Институт стратегии развития образования РАО».

Цель лабораторных работ по математике – развитие умений проведения исследования и эксперимента на основе углубления, расширения и применения теоретических знаний. В ходе лабораторных работ, являющихся одним из видов самостоятельной практической работы, у учащихся формируются метапредметные результаты обучения, в частности, познавательные УУД и функциональная математическая грамотность, которые необходимы им на следующем уровне обучения, в познании окружающей природы и успешной личностной реализации в реальной жизни.

Лабораторная работа – одна из форм организации учебного процесса. В зависимости от подхода к организации обучения той или темы курса учитель может организовать проведение соответствующей лабораторной работы на разных этапах изучения темы. Например, учитель может создать проблемную ситуацию, если организует выполнение работы перед изучением теоретического материала. Они могут проводиться в процессе изучения темы, являясь составляющей системы средств обучения теме.

Лабораторные работы могут завершать изучение темы и исполнять роль средства обобщения и систематизации знаний и умений. Вводная и заключительная части лабораторной работы проводятся фронтально, основная часть работы может проводиться как при фронтальной работе, так индивидуальной или групповой. В рамках заключительной части работы проводится: подведение общих итогов лабораторной работы; обсуждение и оценивание результатов работы всех или отдельных учащихся; рекомендации учащимся в направлении самостоятельного изучения темы, углублённого изучения темы или устранения пробелов в системе знаний.

На этапе подготовки к проведению лабораторных работ могут быть разработаны учителем совместно с учащимися критерии оценки результативности выполнения работы. Например, *критериями оценки* результативности могут быть:

степень реализации цели и задач работы;

качество выполнения заданий;

соответствие результатов работы заданным требованиям;

сформированность у учащихся умений и знаний, соответствующих теме работы;

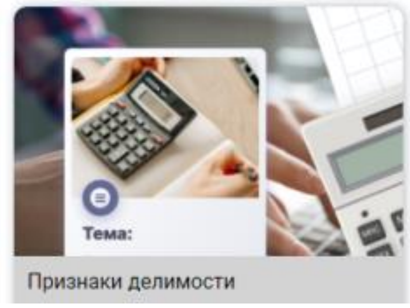
личностная ценность информации, содержащейся в работе.

Структура лабораторных работ представлена несколькими блоками: мотивационное видео с интерактивным вопросом; методические рекомендации для учителя; теоретический материал; система четырех модулей (работ) взаимосвязанных единой темой и целью лабораторной работы; задания для итогового контроля; литература. Задания каждой работы, составляющих систему, с одной стороны, составляют единое целое с теоретическим и задачным материалом темы, а с другой, расширяют и углубляют её содержание. Отметим, что учитель математики в подходе проведения лабораторных работ в большей степени должен ориентироваться на организацию исследования, постановки проблемной задачи, когда учащийся самостоятельно выдвигает гипотезу и результатом выполнения работы является её подтверждение или опровержение. Приведём примеры некоторых работы учебного предмета «Математика» в 7 классах.

2.3.2. Лабораторные работы по математике, 7 класс

Лабораторная работа «Признаки делимости». Алгебра, 7 класс

Место в изучении курса: раздел «Числа и вычисления. Делимость»



Цель работы: развивать знания о признаках делимости в единстве с умениями применения признаков делимости суммы и произведения при решении задач.

Задачи:

1) сформировать знания признаков делимости на 6, 11, 15;

2) сформировать знания свойства делимости произведения на число;

3) сформировать знания свойства делимости суммы чисел;

4) сформировать знание признака делимости на произведение взаимно простых чисел;

5) развивать умения применения свойств и признаков суммы и произведения делимости при решении математических и практических задач.

Основное содержание.

В рамках ***первого модуля «Признак делимости на 11»*** происходит актуализация знаний известных признаков делимости на 2, 5 и 10, на 3 и 9. Учащиеся формулируют основные принципы этих признаков: выявление делимости числа A на число B: а) по последней цифре числа A; б) по сумме цифр числа A.

Далее учащимся предлагается провести аналогию с этими принципами делимости и выдвинуть гипотезу о признаке делимости числа A на 11, например,

1) если число оканчивается 1, то оно делится на 11;

2) если последние цифры числа 11, то число делится на 11;

3) если последние цифры числа кратны 11, то число делится на 11;

4) число, кратное 11, может оканчиваться любой цифрой.

Затем, учащиеся проверяют выдвинутую гипотезу, подтверждая или опровергая её, формулируют признак делимости числа A на 11: если в числе сумма цифр, стоящих на нечётных местах, отличается от суммы цифр, стоящих на чётных местах на 0 или величину, кратную 11, то это число делится на 11. Затем применяют этот признак при решении задач.

Второй модуль «Делимость произведения» начинается с проблемной ситуации: учащимся предлагается выяснить, делится ли произведение достаточно больших чисел на числоBбез выполнения действий – вычисления значения произведения и выполнения деления. Учащиеся в процессе выполнения эксперимента с числами выявляют закономерность и выдвигают общую гипотезу: если хотя бы один множитель делится на некоторое число, то и произведение делится на это число. Подтверждают эту гипотезу. В рамках одного из заданий выявляют общие делители трёхзначных чисел, записанных с помощью одной цифры.

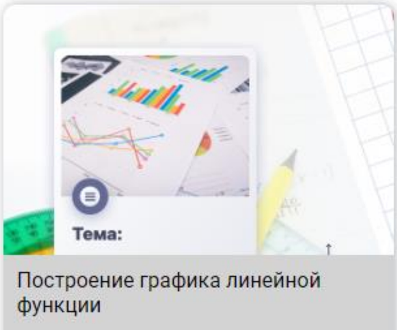
В рамках ***третьего модуля «Делимость суммы и разности»*** учащиеся выполняют исследование, направленное на открытие признака делимости суммы (разности) на число. Затем выполняют обратную задачу: выявляют возможное значение одного из слагаемых, если известно второе слагаемое и число, на которое делится сумма (разность) чисел.

Четвертый модуль «Признак делимости на произведение взаимно простых чисел» направлен на самостоятельное выведение новых признаков делимости с использование известные признаков. Учащиеся выполняют экспериментальную работу, в процессе анализа и сравнения результатов которой формулируют признак делимости на произведение взаимно простых чисел.

Лабораторная работа завершается решением математической задачи и практико-ориентированной задачи, описывающей реальную жизненную ситуацию, на применение признаков делимости чисел.

Лабораторная работа «Построение графика линейной функции». Алгебра, 7 класс

Место в изучении курса: раздел «Функции. Линейная функция».



Цель работы: развивать знания о свойствах функции в процессе построения графика линейной функции

Задачи:

1) развивать умение построения графика линейной функции;

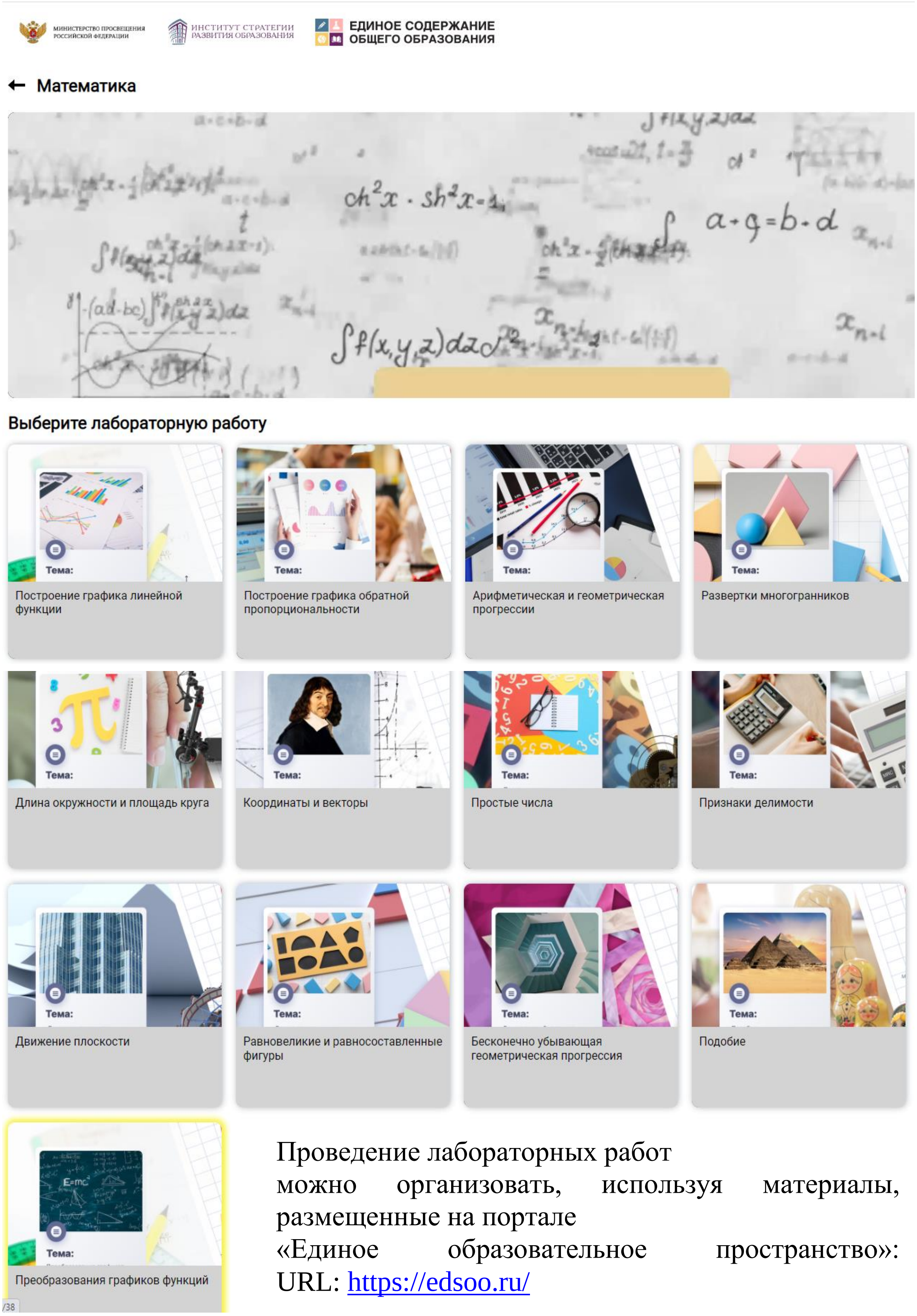
2) сформировать умение оперировать понятием “геометрический смысл коэффициентов k и b”;

3) сформировать знания некоторых свойств линейной функции;

4) сформировать понимание необходимости в некоторых случаях преобразования уравнения функции для построения её графика.

Основное содержание лабораторной работы связано с изучением линейной функции, её свойств и построением графика. В ходе работы учащиеся проводят исследование, направленное на выявление геометрического смысла коэффициентов k и b, проводят экспериментальную работу, результаты которой подтверждают гипотезы, выдвинутые на разных этапах исследовательской работы. В рамках последнего модуля учащимся предлагается построить графики функций вида $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_{n(x)}}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно. Отметим, что построение графиков этих функций учащимися 7 класса возможно только после преобразования уравнения, после которого построить график исходной функции, учитывая область её определения.

Лабораторная работа завершается задачами, ориентированными на применение свойств и графиков линейной функции. В текстах задач описываются реальные жизненные ситуации. Таким образом, в процессе решения этих задач раскрывается связь темы «Линейная функция» с жизнью.



Проведение лабораторных работ можно организовать, используя материалы, размещенные на портале «Единое образовательное пространство»: URL: https://edsoo.ru/

2.4. Формирование функциональной математической грамотности высоких уровней

2.4.1. Оценивание функциональной математической грамотности по модели международного исследования PISA

Методологической основой проекта «Мониторинг формирования и оценки функциональной грамотности», реализуемого в ИСРО РАО с 2018 года, была выбрана концепция международного исследования PISA. Согласно ей в части оценки математической грамотности, основу организации исследования составили три структурных компонента:

– *контекст,* в котором представлена проблема: личный, образовательный, общественный, научный;

– *содержание математического образования*, которое используется в заданиях: Количество, Пространство и формы, Изменения и зависимости, Неопределенность и данные;

– *мыслительная деятельность,* необходимая для связывания контекста, в котором представлена реальная проблема, с математическим содержанием, необходимым для ее решения: Формулировать задачу математически, Применять математические факты, понятия, процедуры, Интерпретировать/оценивать математический результат, Рассуждать.

Концептуальные положения в части выделения уровней математической грамотности базировались на том, что показатель математической грамотности является сложным интегрированным качеством, формируемым различными входящими в него факторами. Исследователями PISA к ним были отнесены перечисленные ниже семь факторов, задающих его таксономию и определяющих соответствующие им виды деятельности.

Математизация – фактор, отвечающий за способность учащихся к переводу реальной жизненной ситуации на язык математики, создание ее математической модели. Диапазон сложности проявления данной способности охватывает и простейший случай, когда требуется интерпретация заданной модели в реальной ситуации, и наиболее сложный – при котором требуется самостоятельное создание модели с множеством переменных, связей, допущений и ограничений, проверка, удовлетворяет ли модель требованиям задачи, оценка и сравнение различных моделей.

Репрезентация – фактор, отвечающий за способность к работе с различными способами представления математических структур (числовыми, буквенными, графическими: число, график, диаграмма, чертеж, формула, неравенство, граф и пр.), описания математических моделей (арифметическая, алгебраическая, функциональная, геометрическая, вероятностно-статистическая). Диапазон сложности находится в границах от обработки знакомого представления, выполнения с ним знакомой стандартной операции до использования нестандартного представления, требующего декодирования и интерпретации, самостоятельной разработки репрезентации, отражающей ключевые аспекты сложной ситуации, сравнения и оценки различных репрезентаций.

Коммуникация – фактор, отвечающий за способность работать с информацией, обмениваться информацией, использовать различные формы ее представления — текстовые и графические, переходить от одних форм к другим, структурировать информацию с помощью таблиц и схем, представлять, объяснять и обосновывать результаты. Диапазон сложности задается объемом и сложностью информации (текста и графики), множественностью форм, степенью знакомства с идеями, объектами, фактами, упоминаемыми в тексте, множественностью связей и мыслительных операций по обработке информации.

Рассуждение и аргументация – фактор, отвечающий за способность к использованию логических конструкций и построений, формулированию выводов, построению обоснований, к размышлению. Диапазон сложности: от элементарного следования заданной инструкции, прямого рассуждения в рамках одного аспекта проблемы, простого вывода на основе соединения частей информации до синтеза и оценки информации, создания цепочек рассуждений для обоснования своих выводов, проведения обобщений, опирающихся на многочисленные элементы информации и объединяющих их устойчивым и целенаправленным образом.

Формализация – фактор, отвечающий за способность распознавать и использовать математические понятия, термины, символику, формальный язык и формальные операции. В простейших задачах не требуется никаких математических правил или символических выражений, только фундаментальные арифметические операции с целыми числами, легко поддающимися вычислению. Высокий уровень проявления этой способности характеризуется многошаговым применением формальных математических процедур, гибкой работой с функциональными или алгебраическими отношениями, использованием техники алгебраических, функциональных преобразований, геометрических построений, формальных знаний для получения результатов.

Разработка стратегий – фактор, отвечающий за способность планировать решение проблемы, выстраивать последовательность действий, направленных на преобразование ситуации, на поиск решения, привлекать для этого математические алгоритмы, факты, методы решений и способы действий. Диапазон сложности: от выполнения прямых знакомых действий до создания собственных стратегий для нахождения исчерпывающего решения или обобщенного вывода, для оценки или сравнения различных возможных стратегий.

Инструментальность – фактор, отвечающий за способность выполнять широкий спектр действий с математическим инструментарием: от простых измерений, вычислений и построений со стандартными инструментами в знакомых ситуациях до сложной обработки данных, представленных в электронном виде, и осмысления ограничений при применении инструментов.

Разграничение по уровням математической грамотности требует учета характера проявления каждого фактора в реальной ситуации, а достижение уровня носит кумулятивный характер и означает овладение всеми способностями предшествующих уровней.

Описание уровней было сконструировано исследователями PISA на основе качественного соответствия каждому из выделенных факторов, а также количественных результатов последующего выполнения заданий участниками исследования. Ниже мы приведем ключевые слова, характеризующие каждый из этих шести уровней, а их связь с выделенными факторами укажем для наивысшего, шестого, уровня.

6-й уровень: нетипичные контексты, сложные проблемы, исследование и моделирование (*математизация*); разные источники, преобразование информации из одного формата в другой (*коммуникация*); различные способы представления математических структур (*репрезентация*); владение математической символикой, операциями и зависимостями (*формализация*); разработка новых и выбор рациональных стратегий (*разработка стратегий*); интуиция, выводы и аргументация, точность и ясность формулировок, рефлексия (*рассуждения и аргументация*).

5-й уровень: комплексные проблемные ситуации; сложные модели и их ограничения установление допущений; выбор, сравнение и оценка различных стратегий; связанные формы представления информации; целенаправленные рассуждения, использование формального языка; выводы и интерпретации в письменной форме; предпосылки к рефлексии.

4-й уровень: сложные конкретные ситуации; четко определенные (детальные) модели, некоторые ограничения и допущения; выбор и интеграция информации; различные формы представления информации; символика, напрямую связанная с конкретным аспектом ситуации; интуиция в простых ситуациях; рассуждения и интерпретация, изложение объяснений, аргументы с опорой на свои действия, доводы.

3-й уровень: конкретные ситуации; простые модели; различные информационные источники; простые методы, четко описанные процедуры, принятие решений на каждом шаге; прямые рассуждения, здравая интерпретация; запись решения; умение выполнять действия с процентами, обыкновенными и десятичными дробями, пропорциональными зависимостями.

2-й уровень: элементарные ситуации; единственный источник информации; единственная форма представления информации; стандартные алгоритмы, формулы, процедуры, правила; целые числа; прямой вывод; грамотная интерпретация полученного результата.

1-й уровень: знакомые контексты; четко определенные ситуации; прямые указания; заданная информация, распознавание нужной информации; стандартные процедуры, очевидные действия; ответ на ясно сформулированный вопрос.

Ключевые слова могут служить маркерами продвижения от уровня к уровню. Так, например, для фактора математизации ключевым является степень самостоятельности обучающегося при работе с моделью: от полной заданности в условиях шаблонной модели на уровнях 1 и 2 через простые модели в конкретных ситуациях на уровнях 3 и 4 до самостоятельного моделирования сложных проблемных ситуаций с учетом наложенных ограничений и допущений на уровнях 5 и 6.

Однако для целей формирования функциональной грамотности такая тонкая градация уровней не столь актуальна, как для ее оценки, поскольку учителю в процессе обучения трудно ориентироваться на шесть уровней и организовать адекватную конструктивную работу. Кроме того, важно помнить, что по данным исследования PISA только 8% российских учащихся показывают результаты, соответствующие 5 и 6 уровням (у лидеров это результат доходит до 45%). А это значит, что стоит задача увеличить число учащихся, достигающих высоких уровней, прежде всего, за счет акцентирования на этом параметре математической подготовки учащихся классов с углубленным изучением математики. А пока целесообразно уменьшить количество уровней до более «осязаемых» и понятных пяти уровней: недостаточный (в PISA ему соответствует уровень 1 и ниже), низкий (уровень 2, пороговый в PISA), средний (уровень 3 и часть уровня 4), повышенный (уровень 4 и часть уровня 5), высокий (уровень 6 и часть уровня 5).

Функциональная математическая грамотность учащихся классов с углубленным изучением математики должна соответствовать повышенному и высокому уровням или приближаться к ним.

Для помощи учителю в организации процесса формирования функциональной математической грамотности учащихся классов с углубленным изучением математики приведем список заданий высокого и повышенного уровней из открытого банка заданий, разработанных в Институте стратегии развития образования РАО в 2019–2021 гг. в рамках выполнения государственного задания и представленных на портале: http://skiv.instrao.ru/bank-zadaniy/matematicheskaya-gramotnost/. В список включены задания для 6-9 классов.

6 класс

Задание 3. Комплексное задание «Акция в магазине»

Задание 3. Комплексное задание «Многоугольники»

Задание 2. Комплексное задание «Выставка натюрмортов»

Задание4. Комплексное задание «Занятия Алины»

Задание 2. Комплексное задание «Ковёр в детскую комнату»

Задание 3. Комплексное задание «Покупки по акции»

Задание 4. Комплексное задание «Садовая дорожка»

Задание 4. Комплексное задание «Сообщения»

Задание 4. Комплексное задание «Электробус»

7 класс

Задание 2. Комплексное задание «Ремонт комнаты

Задание 2. Комплексное задание «Московский метрополитен»

Задание 2. Комплексное задание «Конструкция строительной фермы»

Задание 2. Комплексное задание «Экскурсия по заповеднику»

Задание 4. Комплексное задание «Экскурсия по заповеднику»

Задание 1. Комплексное задание «Предпраздничная распродажа»

Задание 2. Комплексное задание «Предпраздничная распродажа»

Задание 2. Комплексное задание «Клумбы для дачи»

Задание 3. Комплексное задание «Лестница»

8 класс

Задание 2. Комплексное задание «Кресельные подъёмники»

Задание 2. Комплексное задание «Уход за лошадьми»

Задание 2. Комплексное задание «Первая линия московского метро»

Задание 2. Комплексное задание «Доставка обеда»

Задание 3. Комплексное задание «Деревянный конструктор «Радуга»»

Задание 3. Комплексное задание «Индекс массы тела»

Задание 3. Комплексное задание «Классический бисквит»

Задание 4. Комплексное задание «Коробка для кексов»

Задание 2. Комплексное задание «Коробки для торта»

Задание 4. Комплексное задание «Освещение зимнего сада»

Задание 3. Комплексное задание «Столики в кафе»

Задание 4. Комплексное задание «Студенческая практика»

Задание 3. Комплексное задание «Чудо-арбузы»

9 класс

Задание 1. Комплексное задание «Полочка в шкафу»

Задание 2. Комплексное задание «Олимпийские медали»

Задание 2. Комплексное задание «Как измерить ширину реки»

Задание 3. Комплексное задание «Как измерить ширину реки»

Задание 2. Комплексное задание «Стеллаж из ящиков»

Задание 2. Комплексное задание «Куриные яйца»

Задание 2. Комплексное задание «Деревенский колодец»

Задание 2. Комплексное задание «Деление одноклеточных организмов»

Задание 3. Комплексное задание «Домашние животные»

Задание 3. Комплексное задание «Железный обод»

Задание 4. Комплексное задание «Зона отдыха»

Задание 4. Комплексное задание «Масса теленка»

Задание 1. Комплексное задание «Прибыль малого предприятия»

Задание 2. Комплексное задание «Прибыль малого предприятия»

Задание 3. Комплексное задание «Проекционное расстояние»

Задание 4. Комплексное задание «Тренажёр для лошадей»

Работа по наполнению открытого банка заданий была продолжена и в 2022 году, следовательно, приведенный выше список может быть расширен после завершения апробации.

Представленные ниже примеры заданий для учащихся 7 классов из данного списка соответствуют математической подготовке, отвечающей высокому уровню математической грамотности. Ученики, находящиеся на этом уровне, способны работать с комплексными проблемными ситуациями, различать модели и их ограничения, могут разрабатывать собственные стратегии решения незнакомых ситуаций. Они способны выбирать информацию из нескольких источников, представленную в различных формах (график, формула, символьная запись). Они могут представлять свои рассуждения в письменной форме, использовать формальный язык, делать выводы и давать интерпретации полученным результатам. Именно таким характеристикам и соответствуют эти задачи. Рассмотрим их подробнее и дадим некоторые комментарии методического характера.

2.4.2. Примеры заданий высоких уровней математической грамотности

Пример 1. Задание «Ремонт комнаты»

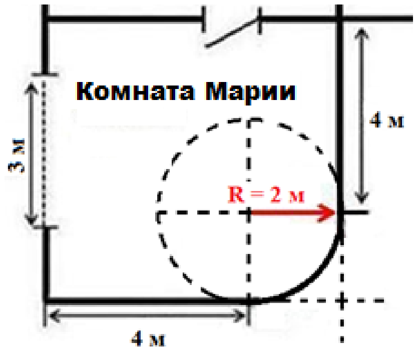
Ниже приводится фрагмент комплексного задания «Ремонт комнаты» с интересующим нас заданием 2.

Прочитайте текст и выполните задания.

Ремонт комнаты

Семья Марии делает ремонт в её комнате. План комнаты с замерами, которые сделала Мария, представлен ниже.

Комната имеет неправильную форму: три прямых угла, а вместо четвёртого угла она имеет стену округлой формы.



Для покрытия пола Мария выбрала ковролин. Ковролин продают в рулонах, от которых покупатель может попросить отрезать необходимое ему количество метров. Ширина рулона – 2 м.

Планируется полностью покрыть пол комнаты ковролином, без зазоров и нахлёстов.

Для справок: $C = 2\pi R$ – длина окружности, $S = \pi R^2$ – площадь круга, где R – радиус круга. Считайте, что $\pi = 3{,}14$.

Задание 2. Из-за того, что один из углов комнаты «круглый», ковролин обрезают по форме скругления. Определите площадь остатков ковролина, получившихся в результате скругления. Ответ дайте в м^2.

Запишите ответ и приведите соответствующее решение.

Комплексное задание «Ремонт комнаты» описывает реальную жизненную ситуацию, которая может возникнуть в семье, делающей ремонт в квартире. Задание формулируется вне предметной математической области в том смысле, что ученику не сказано, какие математические действия или операции требуется выполнить. Вместе с тем, включение в условие плана комнаты помогает учащимся «увидеть» знакомые геометрические фигуры (окружность, круг, квадрат).

Вводный текст задания включает информацию двух видов: *текстовую* и *графическую*. Задание связано с геометрическим содержанием курса математики, с использованием геометрических фактов и построений, связанных с квадратом и кругом, и их площадями, что и определяет область содержания – *Пространство и формы*.

Отнесение данного задания к высокому уровню математической грамотности определяется, прежде всего, тем, что учащемуся предложен план комнаты в виде фигуры сложной формы, для которой у него нет готовой формулы, он должен использовать такое свойство площади как аддитивность *(разработка стратегий и математизация)*. Но для начала он должен провести анализ изображения, «прочитать» заданную конфигурацию, считать с чертежа требуемую информацию о входящих в нее геометрических фигурах, выяснить размеры, необходимые с точки зрения ответа на поставленный вопрос. Кроме того, он должен уметь описывать решения, в некоторых случаях с использованием формального языка (используя общепринятые обозначения различных величин – радиуса окружности, площади фигур, стороны квадрата), а также уметь излагать объяснения в письменной форме *(формализация, рассуждения и аргументация)*. Для ответа на вопрос задания, учащемуся необходимо применить формулу для вычисления площади квадрата и формулу для вычисления площади круга.

Ученик должен *применить* математические понятия (окружность, радиус окружности, круг, квадрат), факты (свойство аддитивности площади) и процедуры (вычисление площади круга и площади квадрата). Но сначала он должен использовать навыки извлечения информации из рисунка (распознавание геометрических фигур и определение их размеров), выбрать необходимые формулы для вычисления площади, получившейся в результате скругления (из площади квадрата со стороной 2 метра необходимо вычесть четверть площади круга с радиусом 2 метра).

В преамбуле задания для справок учащимся даны формулы для вычисления длины окружности и площади круга, так как важно проверить не знание формулы, а умение выбрать и применить выбранную формулу для решения проблемы. Все действия ученик должен выполнить на основе тех знаний и того опыта, который он получил на уроках математики: составлять фигуры из заданных элементов с учётом их линейных размеров, вычислять площадь фигуры сложной формы, используя свойства аддитивности площади.

Работа с данной ситуацией может быть продолжена и проведена с заменой размеров комнаты и ширины ковролина, что может усложнить вычисления, привести к появлению обрезков не только в скруглённом угле, но и по длине комнаты, к необходимости поиска более рациональной укладки и др.

Интересно обратить внимание учащихся на то, что при радиусе равном 2, площадь круга и длина его окружности равны, но имеют разный смысл и единицы измерения. Возможно ли такое совпадение при других радиусах?

Также полезно обсудить следующие вопросы:

– какое приближенное значение следует выбрать для числа π (3; 3,1; 3,14 и т.д.)?

– как выбранное значение может отразиться на результате с точки зрения практического применения?

– почему не рационально искать площадь остатков ковролина, вычисляя площадь всей комнаты?

– может ли в данной задаче быть полезна формула длины окружности?

– как изменить сюжет задачи, чтобы формула длины окружности была задействована в решении?

Задача может быть предложена семиклассникам в начале учебного года на уроке геометрии при повторении геометрического материала по теме «Площадь» из курса математики 5-6 класса. Целесообразно предлагать данное задание для индивидуальной работы на уроке или дома с последующей фронтальной проверкой. Можно вставить это задание и в вариант проверочной работы. В этом случае предлагается следующая система оценивания задания.

2 балла	Дан верный ответ и приведено верное решение. Ответ: 0,86 м^2; пример возможного решения: 1) $2 \cdot 2 = 4$ (м^2); 2) $3{,}14 \cdot 4 : 4 = 3{,}14$ (м^2); 3) $4 - 3{,}14 = 0{,}86$ (м^2). Или дано любое аналогичное решение.
1 балл	В логически верном решении допущена арифметическая ошибка, в результате которой дан неверный ответ; ИЛИ дан ответ 1 (м^2) и приведено логически верное решение, где π округлено до 3.
0 баллов	Другие варианты. Ответ отсутствует.

Пример 2. Задание «Предпраздничная распродажа»

Ниже приводится комплексное задание «Предпраздничная распродажа», в которое входят два задания.

Прочитайте текст и выполните задания.

Предпраздничная распродажа

Чтобы привлечь покупателей и распродать товар, магазины устраивают сезонные распродажи.

Задание 1. У торговой компании, продающей спортивную одежду и обувь, два магазина – «Спринт» и «Спурт». Ассортимент и цены на товары в этих магазинах одинаковые, но в период предпраздничной распродажи в магазинах ввели разные системы скидок.

Магазин «Спринт»	*Магазин «Спурт»*
Скидка за покупку: до 5 тыс. рублей – 10 %, свыше 5 тыс. рублей – 20 %	Скидка на второй товар в чеке – 10 %, скидка на третий товар в чеке – 20 % (*товары в чеке располагаются в порядке уменьшения их стоимости*)

Юра собирается купить кроссовки, футболку и бейсболку, которые до распродажи стоили: кроссовки – 2500 р., бейсболка – 1200 р., футболка – 700 р.

В каком магазине ему выгоднее сделать эту покупку?

Запишите ответ и приведите соответствующее решение.

Задание 2. Магазин мужской одежды проводит предпраздничную акцию:

«За покупку до 30 тыс. р. даётся скидка 5 %, а при покупке от 30 до 40 тыс. р. – скидка 10 %». Покупатель выбрал костюм стоимостью 28 тыс. р. Продавец предлагает ему купить ещё и какой-нибудь аксессуар, чтобы получить скидку 10 %.

Покупатель выбрал шарф. Стоимость шарфа – 3 тыс. р.

Для каждого утверждения в таблице отметьте, верное оно или неверное.

Утверждение	Верно	Неверно
За костюм и шарф покупатель заплатил меньше, чем заплатил бы за один костюм со скидкой.	☐	☐
Покупка шарфа обошлась покупателю в 2,85 тыс. р.	☐	☐
За счёт скидок покупатель примерно за одни и те же деньги купил не один товар, а два.	☐	☐

Это комплексное задание связано с различными схемами скидок, которые применяются магазинами, как правило, на распродажах. Задания 1 и 2 отнесены к высокому уровню, что связано со сложностью и нестандартностью предложенных моделей, проблемностью ситуаций, необходимостью рассматривать и сравнивать различные варианты. Вводный текст к заданиям включает исключительно текстовую информацию. Оба задания сосредоточены в одной области содержания – *Количество*.

В задании 1 представлена проблемная ситуация: надо определить, в каком из двух магазинов условия конкретной покупки являются для покупателя более выгодными *(разработка стратегий и математизация)*. Для этого необходимо внимательно вчитаться в условие и просчитать два альтернативных варианта, предлагаемых магазинами. Чтобы применить скидку, для магазина «Спринт» потребуется сравнить общую стоимость покупки с заданным значением, принятым для акции, а для магазина «Спурт» потребуется сначала упорядочить товары, как это требуется в условиях акции. Выполняя вычисления, необходимо применить хорошее владение процентами *(формализация)*. Также здесь требуется записать решение *(рассуждения и аргументация)*.

При решении задания 1 учащиеся чаще всего допускают вычислительные ошибки и ошибки в упорядочении товаров по ценам при расчете стоимости товаров в магазине «Спурт». Также не все семиклассники перешли к свернутому действию нахождения процента от числа и находят процент нерационально: делением на 100 и умножением на количество процентов, а не умножением на соответствующую дробь. Например, 4400:100*10=440, вместо 4400*0,1=440.

В Задании 2 даны утверждения, которые для понимания того, являются ли они верными, потребуют от учащихся применения различных способов рассуждения, переформулирования заданных условий, выполнения вычислений, высокого уровня интерпретации и оценки информации в рамках представленной модели *(формализация, рассуждения и аргументация)*.

Утверждение 1 требует сравнения двух вариантов покупки – с шарфом (27900 руб.) и без шарфа (26600 руб.), которые будут различаться величиной скидки.

Утверждение 2 «Покупка шарфа обошлась покупателю в 2,85 тыс. р.» требует понять, что означает в данном случае «покупка обошлась в …», ведь стоимость шарфа – 3000 рублей. То есть, что шарф, как и костюм, куплен со скидкой 10%. Процент от суммы равен сумме процентов от каждого слагаемого, и наоборот. Полезно обсудить и обосновать, в том числе алгебраически, этот факт, имеющий часто применимое прикладное значение, отдельно.

Утверждение 3 носит оценочный характер, что и используется продавцами: примерно за одну и ту же сумму денег (На сколько больше заплатил покупатель в данном случае? На 1300 рублей) покупатель приобретает не один товар, как планировал, а два или более. В этом смысле относительно первоначального плана покупки можно считать, что шарф был куплен за 1300 рублей.

Работа с данной ситуацией может быть продолжена и проведена с заменой следующих данных: размера скидки; цены товара; количества товара.

Задания могут быть предложены семиклассникам в начале учебного года на уроке алгебры при повторении материала по теме «Проценты» из курса математики 5-6 класса. Задания подходят для работы в парах и группах, с последующим фронтальным обсуждением.

При использовании данного комплексного задания для контроля сформированности функциональной грамотности можно пользоваться следующими критериями оценивания заданий.

Задание 1.

2 балла	Дан верный ответ: Магазин «Спринт» (или: в первом магазине); и приведено верное решение. В приведенном обосновании говорится об имеющихся вычисленных скидках в двух магазинах или о вычисленной разнице в складках. Например такое: скидка в магазине «Спринт» – (2500+1200+700)х0,1 = 440 (р.), а в магазине «Спурт» – 120 + 140 = 260 (р.); 440 р. > 260 р.
1 балл	Дан неверный ответ и приведено обоснование, из которого следует, что не выполнено условие «товары в чеке располагаются в порядке уменьшения их стоимости»: скидка в магазине «Спурт» подсчитана из условия «в порядке увеличения стоимости»: 120 + 500 = 620 (р.). Или дан верный ответ «Спринт», логика вычислений верная, но присутствует одна вычислительная ошибка.
0 баллов	Другие варианты ответа. Ответ отсутствует.

Задание 2.

2 балла	Верные ответ: Неверно-Неверно-Верно. Все ответы выбраны верно.
1 балл	Выбраны ответы: Верно-Неверно-Верно или Неверно-Верно-Верно.
0 баллов	Другие варианты. Ответ отсутствует.

Пример 3. Задание «Экскурсия по заповеднику»

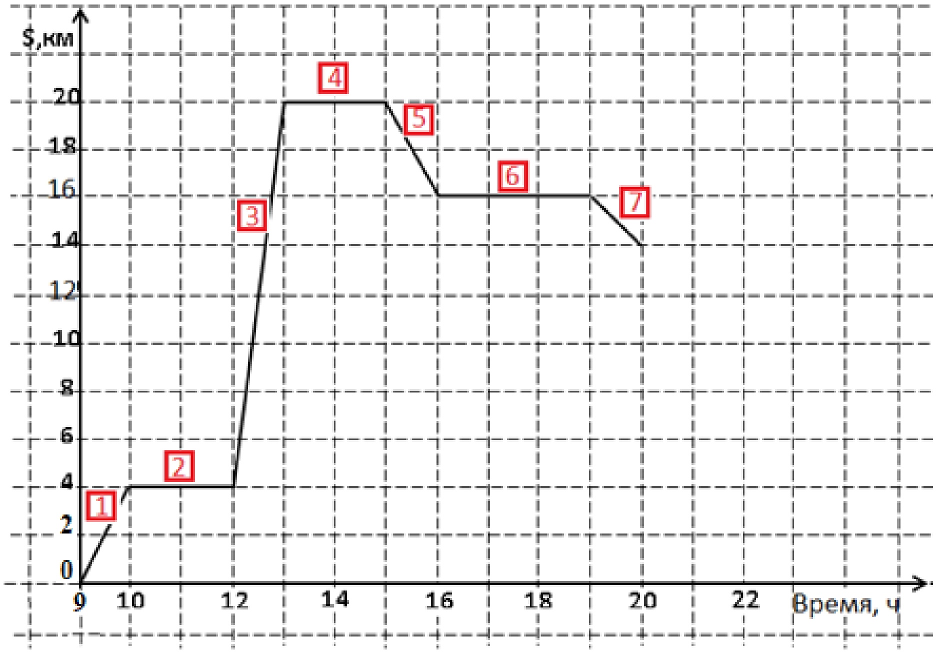
Ниже приводится фрагмент комплексного задания «Экскурсия по заповеднику» с интересующими нас заданиями 2 и 4.

Прочитайте текст и выполните задания.

Экскурсия по заповеднику

Группа туристов отправилась на однодневную экскурсию по природно-этнографическому заповеднику. Начало маршрута – на туристической базе, окончание – в лесном лагере. В ходе экскурсии туристы посетили этнографическую деревню, совершили пешие переходы и на велосипедах, переправы через горную реку.

Среди туристов был математик, который описал их путь с помощью графика. На графике по горизонтальной оси он отложил время, по вертикальной – расстояние по маршруту, на котором туристы находятся от базы.



Дополнительная информация: В условиях пересечённой местности средняя скорость пешехода по ровной грунтовой дороге – от 3 до 5 км/ч, скорость велосипедиста от 10 до 14 км/ч. Эти скорости могут быть меньше, если дорога идет в гору, или больше, если дорога идет с горы.

Задание 2. Среди туристов был и фотограф, который делал снимки в течение всего дня.

А **Б**

В **Г**

А) Какая фотография была сделана на участке 3?

Отметьте один верный вариант ответа.

1) А 2) Б 3) В 4) Г

Б) На каком из данных участков маршрута могла быть сделана фотография А?

Отметьте один верный вариант ответа.

1) 1 2) 2 3) 5 4) 7

Задание 4. Маршрут по природно-этнографическому заповеднику от туристической базы до лесного лагеря планируют сделать велосипедным. За какое примерно время туристы смогут преодолевать этот маршрут на велосипеде без остановок? Выберите наиболее точную оценку и обоснуйте свой выбор. Выберите один верный вариант ответ.

1) 1,7 ч 2) 2 ч 3) 2,2 ч 4) 2,6 ч

Объясните свой ответ.

Данное комплексное задание в преамбуле содержит: вербальное описание ситуации туристической экскурсии по природно-этнографическому заповеднику (место начала маршрута и место его окончания, события на маршруте – посещение этнографической деревни, пешие переходы и на велосипедах, переправа через горную реку); график движения туристов по маршруту; дополнительную информацию о скоростях передвижения пешеходов и велосипедистов по пересеченной местности. Нестандартный характер ситуации, представление информации вербально, в виде фотоизображений и графика, необходимость применения оценочных действий определяют отнесение задания к высокому уровню математической грамотности.

Вводный текст к заданиям включает информацию двух видов: *текстовую* и *графическую*, и относится к типу не сплошных текстов. Уже при чтении вводного текста учащиеся должны осознать, что на графике представлена зависимость расстояния по маршруту, на котором туристы находятся от лагеря, от времени прохождения маршрута.

Моделью ситуации является кусочно-заданный линейный график. Поскольку ученикам предложен график зависимости пути от времени движения, это определяет область содержания функциональной математической грамотности – *Изменение и зависимости*.

Ученик должен провести анализ графика и дополнительной информации из текста или фото, самостоятельно построить математическую модель, соответствующую описываемой ситуации *(коммуникация и математизация)*. Просчитать и оценить результат по выбранной модели и обосновать его *(формализация, рассуждения и аргументация)*.

В задании 2 достаточно понимания того, что на участке 3 (вопрос А) туристы активно перемещались, причем с наибольшей из всех участков скоростью, следовательно, из представленных на фото видов деятельности следует выбрать движение на велосипеде. А фото А (вопрос Б) соответствует ситуации на графике, когда расстояние от базы не изменяется, то есть остается постоянным в течение всего времени пребывания туристов в этнографической деревне. Существенным в задании 4 является понимание того, что более точная оценка получится, если оценивать время движения на каждом участке движения туристов.

Работа с данной ситуацией может быть продолжена и проведена с заменой графика движения.

Задание может быть предложено семиклассникам на уроке алгебры в завершение изучения темы «Линейная функция и ее график» или в период повторения в конце учебного года. Можно предложить выполнение отдельных заданий комплексного задания в группах или организовать совместное фронтальное обсуждение. Если задание используется для мониторинга функциональной грамотности, то целесообразно использовать следующие критерии оценивания выполнения заданий 2 и 4.

Задание 2.

2 балла	Ответ: А) 3; Б) 2. Оба ответа даны верно
1 балл	Один из ответов дан верно, другой дан неверно или ответ отсутствует.
0 баллов	Другие варианты ответа или ответ отсутствует.

Задание 4.

2 балла	Дан верный ответ: 2) (2 ч) приведено верное решение. Возможное решение: На участке 3 скорость выше 14 км/ч - максимальной средней (видимо, дорога идет с горы), а на участке 7 скорость меньше 4 км/ч - минимальной средней (дорога идет в гору). Поэтому более точная оценка получится, если оценивать время движения на каждом участке движения. На участке 1 пешеходы двигались со скоростью 4 км/ч, можно предположить, что велосипедисты будут двигаться со скоростью 12 км/ч. Велосипедисты проедут его за 4 : 12 = 1/3 ч = 20 мин. Время прохождения участка 3 – 1 ч. На участке 5 пешеходы двигались так же, как и на участке 3, велосипедисты проедут его за 20 мин. На участке 7 пешеходы двигались со скоростью 2 км/ч, можно предположить, что велосипедисты будут двигаться со скоростью также вдвое меньшей, чем 12 км/ч. Велосипедисты проедут его за 2 : 6 = 1/3 ч = 20 мин.

	Итого: 20 x 3 + 60 = 120 мин = 2 ч. Комментарий: При ответе существенным является понимание того, что следует рассматривать каждый участок отдельно
1 балл	Дан верный ответ: 2) (2 ч). Приведено обоснование, но обоснование неполное или содержит неточности.
0 баллов	Другие варианты ответа или ответ отсутствует.

Литература для учителя

Нормативные документы

1. Концепция развития математического образования в Российской Федерации: утверждена распоряжением Правительства РФ от 24 декабря 2013 г. № 2506-р. – Министерство просвещения Российской Федерации. Банк документов. – [Электронный ресурс]. – URL: https://docs.edu.gov.ru/document/b18bcc453a2a1f7e855416b198e5e276/ (дата обращения 27.10.2022).

2. О Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации. Указ Президента Российской Федерации от 01.12.2016 г. № 642. – [Электронный ресурс]. – URL: http://kremlin.ru/acts/bank/41449 (дата обращения: 27.10.2022).

3. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 12 августа 2022 г. № 732 «О внесении изменений в федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования», утвержденный Приказом министерства образования и науки российской федерации от 17 мая 2012 г. № 413. – Официальный интернет-портал правовой информации. – [Электронный ресурс]. – URL: http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202209120008 (дата обращения 27.10.2022)

4. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 № 287 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования" (Зарегистрирован 05.07.2021 № 64101). – [Электронный ресурс]. – URL: http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027 (дата обращения 27.10.2022).

5. Примерная рабочая программа основного общего образования. Математика. Базовый уровень (для 5–9 классов образовательных организаций). – [Электронный ресурс]. – URL:

https://edsoo.ru/Primernaya_rabochaya_programma_osnovnogo_obschego_obrazovaniya_predmeta_Matematika_proekt_.htm (дата обращения: 27.10.2022).

6. Примерная рабочая программа основного общего образования. Математика. Углублённый уровень (для 7–9 классов образовательных организаций). – [Электронный ресурс]. – URL: https://edsoo.ru/Primernaya_rabochaya_programma_osnovnogo_obschego_obrazovaniya_predmeta_Matematika_uglublennij_uroven.htm (дата обращения: 27.10.2022).

7. Примерная рабочая программа среднего общего образования. Математика. Базовый уровень. – [Электронный ресурс]. – URL: https://edsoo.ru/Primernaya_rabochaya_programma_srednego_obschego_obrazovaniya_predmeta_Matematika_.htm (дата обращения: 08.11.2022).

8. Примерная рабочая программа среднего общего образования. Математика. Углублённый уровень. – [Электронный ресурс]. – URL: https://edsoo.ru/Primernaya_rabochaya_programma_srednego_obschego_obrazovaniya_predmeta_Matematika_uglublennij_uroven.htm

9. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования, утверждённый Приказом министерства образования и науки российской федерации от 17 мая 2012 г. № 413. – ФГОС. – [Электронный ресурс]. – URL:https://fgos.ru/fgos/fgos-soo/.

Организация образовательного процесса
и оценивание результатов обучения математике

10. Алексеева Е. Е. Диверсификация содержания математического образования как средство развития учащихся. / Е. Е. Алексеева // Сборник статей международной научно-практической конференции «Образование – 2030. Дорожная карта», 15 июня 2021 г. – М.: Издательство Перо, 2021. – 287 с. – С. 187–191.

11. Алексеева Е. Е. Методика формирования функциональной грамотности учащихся в обучении математике / Е. Е. Алексеева // Проблемы современного педагогического образования. Сборник научных трудов: – Ялта: РИО ГПА, 2020. Вып. 66. – Ч. 2. – 353 с. – С. 10–15.

12. Алексеева Е. Е. Методические особенности формирования математической грамотности учащихся как составляющей функциональной грамотности. / Е. Е. Алексеева // Мир науки, культуры, образования: – 2020. – № 4 (83). – г. Горно-Алтайск, 2020 г. – 508 с. – С. 214–218.

13. Банк заданий для формирования и оценки функциональной грамотности обучающихся основной школы (5–9 классы). – [Электронный ресурс]. – Режим доступа:http://skiv.instrao.ru/bank-zadaniy/ (дата обращения 01.09.2022).

14. Компьютер на уроке создание современной информационно-образовательной среды. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://seninvg07.narod.ru/index.htm(дата обращения 01.09.2022).

15. Математическая грамотность. Сборник эталонных заданий. Выпуск 1. Учеб. пособие. В 2-х ч. Ч. 1 / [Г.С. Ковалёва и др.]; под ред. Г. С. Ковалёвой, Л. О. Рословой – М.; СПб.: Просвещение, 2021. (Функциональная грамотность. Учимся для жизни).

16. Математическая грамотность. Сборник эталонных заданий. Выпуск 2. Учеб. пособие. В 2-х ч. Ч. 1 / [Г. С. Ковалёва и др.]; под ред. Г. С. Ковалёвой, Л. О. Рословой – М.; СПб.: Просвещение, 2021. (Функциональная грамотность. Учимся для жизни).

17. Новая образовательная среда «Единое окно доступа к информационным ресурсам». – [Электронный ресурс]: режим доступа: http://window.edu.ru (дата обращения 01.09.2022).

18. Примеры заданий по математической грамотности, которые использовались в исследовании PISA в 2003–2012 годах. – [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.centeroko.ru/pisa15/pisa15_pub.html (дата обращения 01.09.2022).

19. Реализация ФГОС основного общего образования. Учебный предмет «Математика»: 5 класс: методическое пособие для учителей. – [Рослова Л. О., Алексеева Е. Е., Буцко Е. В.]; под ред. Л. О. Рословой. – М.: ФГБНУ «Институт стратегии развития образования РАО», 2022. – 264 с. – [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://edsoo.ru/Realizaciya_FGOS_osnovnogo_obschego_obrazovaniya_Uchebnij_predmet_Matematika_.htm (дата обращения 27.10.2022).

20. Рослова Л. О. В поиске путей развития математической грамотности учащихся / Л. О. Рослова // Педагогические измерения. – 2017. № 2.– С. 63–68.

21. Рослова Л. О. Используем открытые задания исследования PISA. /Л. О. Рослова // Математика. – 2020. № 2, – С. 8–13.

22. Рослова Л. О. О формировании функциональной математической грамотности младших школьников / Л. О. Рослова // Начальное образование. 2018. № 2 (85). – С. 10–16.

23. Рослова Л. О. Проблема обновления содержания общего образования: от частных случаев к созданию комплексной модели / Л. О. Рослова // Вестник образования. – 2017. № 10. – С. 27–33.

24. Рослова Л. О. Формирование метапредметных результатов обучения средствами практико-ориентированных заданий с математическим содержанием / Л. О. Рослова // Отечественная и зарубежная педагогика. – 2017. Т. 2. № 5 (44). – С. 69–78.

25. Рослова Л. О. Функциональная математическая грамотность: что под этим понимать и как формировать / Л. О. Рослова // Педагогика. 2018. № 10. – С.48–55.

26. Электронный банк Заданий для оценки функциональной грамотности. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fg.resh.edu.ru/(дата обращения 27.10.2022).

Книги и методические пособия

27. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К.Муниципальные олимпиады Московской области по математике. – М.: МЦНМО, 2019.

28. Агаханов Н. Х., Богданов И. И., Кожевников П. А., Подлипский О. К., Терешин Д А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М.: Просвещение, 2008.

29. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М.: Просвещение, 2009.

30. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К., Рубанов И. С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М.: Просвещение, 2011.

31. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К., Рубанов И. С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013.

32. Адельшин А. В., Кукина Е. Г., Латыпов И. А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007–2009. – М.: МЦНМО, 2011.

33. Андреева А. Н., Барабанов А. И., Чернявский И. Я. Саратовские математические олимпиады.1950/51–1994/95. (2-е. исправленное и дополненное). – М.: МЦНМО, 2013.

34. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975.

35. Блинков А. Д. (сост.). Московские математические регаты. Часть 2. 2006–2013 – М.: МЦНМО, 2014.

36. Блинков А. Д., Горская Е. С., Гуровиц В. М. (сост.). Московские математические регаты. Часть 1. 1998–2006 – М.: МЦНМО, 2014.

37. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

38. Горбачев Н В. Сборник олимпиадных задач по математике (3-е изд., стереотип.). – М.: МЦНМО, 2013.

39. Гордин Р. К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы (5-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2012.

40. Гордин Р. К. Это должен знать каждый матшкольник (6-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2011.

41. Зив Б. Г. Задачи по геометрии. 7–11 классы: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / Б. Г. Зив, В. М. Мейлер, А. Г. Баханский. – М.: Просвещение, 2019. – 271 с.

42. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи (8-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.

43. Кноп К. А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам (3-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.

44. Козлова Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка) (7-е издание, стереотипное) – М., МЦНМО, 2013.

45. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958 – 576 с.

46. Прасолов В. В. Решение задач повышенной сложности по геометрии. 7–9 классы: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / В. В. Прасолов. – М.: Просвещение, 2019. – 239 с.

47. Раскина И. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014.

48. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / В. К. Егерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемский и др.; Под. Ред. М. И. Сканави. – М.: ООО «Издательство «Мир и Образование»: ООО «издательство «ОНИКС-ЛИТ», 2013. – 608 с.

Циклы статей учителей ведущих математических школ в журнале «Математика»

Статьи учителей Президентского физико-математического лицея №239 (г. Санкт-Петербург)

49. Карачинский Е. О президентском физико-математическом лицее // Математика (МЦНМО). 2021. № 10, с. 8–10.

50. Михеев Д. Законы сложения и умножения для пятиклассников из школ с углубленным изучением математики // Математика (МЦНМО). 2021.№10, с. 11–12.

51. Шагай М. Наблюдения из геометрии 5 класса // Математика (МЦНМО). 2021.№10, с. 13-14, 59.

52. Александрова А. Уравнение прямой // Математика (МЦНМО). 2021.№10, с. 15–20.

53. Житомирский М. Комбинаторика // Математика (МЦНМО). 2022. №1.

54. Франк В. Задачи, в которых выгодно применять метод координат // Математика (МЦНМО). 2022. №1.

55. Лейбсон К. Кубическая функция. Решение кубических уравнений // Математика (МЦНМО). 2022. № 2.

56. Карачинский Е. Графический способ решения задач с параметрами на плоскости *Oxa* // Математика (МЦНМО). 2022. № 3.

57. Тыртов Н. Поэтапные вычислительные навыки учащихся 5 класса // Математика (МЦНМО). 2022. № 4.

Статьи учителей лицея «ВТОРАЯ ШКОЛА» (г. Москва)

58. Бибиков П. На уроках алгебры в лицее «ВТОРАЯ ШКОЛА» // Математика (МЦНМО). 2020. № 5, с. 4–12.

59. Бибиков П., Козеренко К., Малахов А. Уроки геометрии в лицее «ВТОРАЯ ШКОЛА» // Математика (МЦНМО). 2020. № 6, с. 4–9.